

FEZ

**ELITE**  
**PRÉ-VESTIBULAR**  
**c a m p i n a s**

**Aprovou!**

Elite Resolve

**ITA 2014**

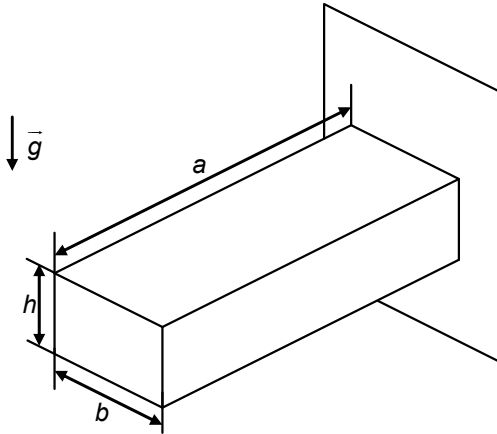
**Física**

**[www.elitecampinas.com.br](http://www.elitecampinas.com.br)**

AS melhores **resoluções** de vestibulares da internet

**QUESTÃO 01**

O módulo de Young de um material mede sua resistência a deformações causadas por esforços externos. Numa parede vertical, encontra-se engastado um sólido maciço de massa específica  $\rho$  e módulo de Young  $\varepsilon$  em formato de paralelepípedo reto, cujas dimensões são indicadas na figura. Com base nas correlações entre grandezas físicas, assinale a alternativa que melhor expressa a deflexão vertical sofrida pela extremidade livre do sólido pela ação do seu próprio peso.

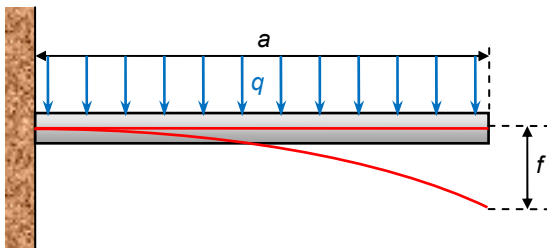


- a)  $3\rho g a b / (2\varepsilon)$
- b)  $3\rho g b^2 / (2\varepsilon)$
- c)  $3\varepsilon b^2 h^2 / (2\rho g a^4)$
- d)  $3\rho g a^4 / (2\varepsilon h^2)$
- e)  $3\rho g b h / (2\varepsilon)$

**Resolução**

**Alternativa D\***

Inicialmente, vamos resolver a questão, supondo um aluno com conhecimento de Resistência dos Materiais, disciplina ministrada tipicamente num segundo ano de cursos de Engenharia.



A deflexão vertical  $f$  sofrida pela extremidade livre (dita flecha máxima) de uma viga engastada em uma de suas extremidades, e submetida a um carregamento  $q$ , distribuído uniformemente ao longo de um eixo perpendicular à parede, de comprimento  $a$ , é dada por:

$$f = \frac{q \cdot a^4}{8 \cdot \varepsilon \cdot I}$$

onde  $\varepsilon$  é o módulo de Young e  $I$  é o momento de inércia.

No exercício em questão, o carregamento que está uniformemente distribuído corresponde ao peso da barra distribuído sobre o seu comprimento  $a$ :

$$q = \frac{|\bar{P}|}{a} = \frac{m \cdot |\bar{g}|}{a} = \frac{\rho \cdot V \cdot |\bar{g}|}{a} = \frac{\rho \cdot a \cdot b \cdot h \cdot |\bar{g}|}{a} = \rho \cdot b \cdot h \cdot |\bar{g}|$$

Já o momento de inércia  $I$  é dado, nesse caso, por:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Assim, substituindo:

$$f = \frac{(\rho \cdot b \cdot h \cdot |\bar{g}|) \cdot a^4}{8 \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{b \cdot h^3}{12}\right)} \Leftrightarrow f = \frac{3 \cdot \rho \cdot |\bar{g}| \cdot a^4}{2 \cdot \varepsilon \cdot h^2}$$

Considerando que algumas das equações usadas são completamente inacessíveis a um estudante egresso do Ensino Médio, e o prejuízo que isso acarreta para um candidato na hora da prova, propomos a anulação da questão.

**Observação:**

Supondo um típico candidato egresso do Ensino Médio, sem nenhum conhecimento prévio sobre esse assunto, poderíamos apontar o seguinte método para descartar alternativas. Suponha uma pequena régua engastada numa parede em uma de suas extremidades:

- intuitivamente, podemos pensar que para um mesmo material, quanto maior o comprimento  $a$ , maior a deflexão, isto é, a deflexão deve ser função estritamente crescente da variável  $a$ . Isso já elimina as alternativas (b), (c) e (e);
- por outro lado, quanto maior for a espessura  $h$ , menor deve ser a deflexão. Isso descarta a alternativa (a), na verdade isso descarta todas as alternativa exceto a (d);
- por exclusão, ficamos com a alternativa (d).

Enfatizamos que essa análise funciona apenas por se tratar de um teste, não funcionando no caso de uma questão dissertativa, e não permitindo chegar, por exemplo, aos coeficientes numéricos presentes na resposta.

**QUESTÃO 02**

Considere dois satélites artificiais  $S$  e  $T$  em torno da Terra.  $S$  descreve uma órbita elíptica com semieixo maior  $a$ , e  $T$ , uma órbita circular de raio  $a$ , com os respectivos vetores posição  $\vec{r}_s$  e  $\vec{r}_t$  com origem no centro da Terra. É correto afirmar que:

- a) para o mesmo intervalo de tempo, a área varrida por  $\vec{r}_s$  é igual à varrida por  $\vec{r}_t$ .
- b) para o mesmo intervalo de tempo, a área varrida por  $\vec{r}_s$  é maior que a varrida por  $\vec{r}_t$ .
- c) o período de translação de  $S$  é igual ao de  $T$ .
- d) o período de translação de  $S$  é maior que o de  $T$ .
- e) se  $S$  e  $T$  têm a mesma massa, então a energia mecânica de  $S$  é maior que a de  $T$ .

**Resolução**

**Alternativa C**

a) **Incorreta.** O período de uma órbita elíptica é dado por:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{\frac{3}{2}}$$

Onde  $a$  é o semi-eixo maior da elipse e  $\mu$  é uma constante.

Como a circunferência é um caso particular de elipse onde os dois semi-eixos possuem mesmo tamanho então concluímos que o período de translação dos dois satélites são iguais.

Já as áreas de  $S$  e  $T$  são respectivamente:

$$A_s = \pi \cdot a \cdot b$$

$$A_t = \pi \cdot a^2$$

b) **Incorreta.** Dado que  $S$  e  $T$  possuem mesmo período, basta compararmos o valor das áreas da elipse e da circunferência. Como  $b < a$ , então  $A_s < A_t$ .

c) **Correto.** Justificado acima (item a).

d) **Incorreta.** Justificado acima (item a).

e) **Incorreta.** A energia do satélite pode ser expressa da seguinte forma:

$$E_s = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2a}$$

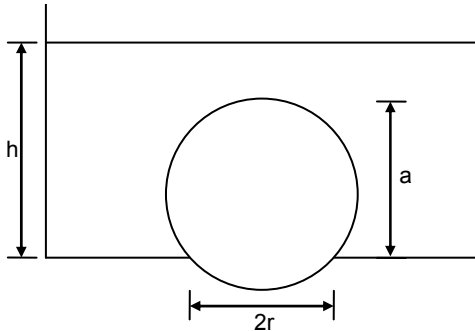
Como a circunferência é um caso particular da elipse concluímos que ambos os satélites,  $S$  e  $T$ , possuem mesma energia.

**Nota:** O desenvolvimento da expressão pode ser encontrado na resolução da questão 20 do ITA de 2012-2013.

(<http://elitecampinas.com.br/gabaritos/ita/2013/fisica.asp>).

**QUESTÃO 03**

Uma esfera de massa  $m$  tampa um buraco circular de raio  $r$  no fundo de um recipiente cheio de água de massa específica  $\rho$ . Baixando-se lentamente o nível da água, num dado momento a esfera se desprende do fundo do recipiente. Assinale a alternativa que expressa a altura  $h$  do nível de água para que isto aconteça, sabendo que o topo da esfera, a uma altura  $a$  do fundo do recipiente, permanece sempre coberto de água.



- a)  $m / (\rho \pi a^2)$
- b)  $m / (\rho \pi r^2)$
- c)  $a(3r^2 + a) / (6r^2)$
- d)  $a / 2 - m / (\rho \pi r^2)$
- e)  $a(3r^2 + a) / (6r^2) - m / (\rho \pi r^2)$

**Resolução**

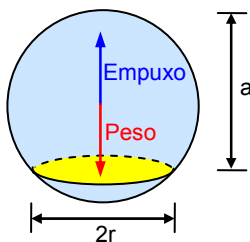
**Alternativa E**

No momento em que a esfera se desprende do fundo atuam sobre ela duas forças significativas, Peso ( $P$ ) e Empuxo ( $E$ ).

Devemos estar atentos ao fato do empuxo não agir sobre toda a esfera. Para calcularmos o volume de líquido deslocado é necessário calcular o volume da calota esférica, que com as variáveis adotadas pelo enunciado fica:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a \cdot (3r^2 + a^2)$$

É necessário perceber que, apesar desse ser o volume do líquido deslocado, o fluido não entra em contato com toda a calota. Deste modo, devemos descontar a pressão que ele faria sobre a área plana,  $A$ , destacada na figura abaixo.



O empuxo total fica:

$$E = \rho \cdot g \cdot V - \rho \cdot g \cdot h \cdot (A)$$

$$E = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a \cdot (3r^2 + a^2) \right) - \rho \cdot g \cdot h \cdot (\pi \cdot r^2)$$

No momento em que o Empuxo é igual ao Peso temos:

$$\rho \cdot g \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a \cdot (3r^2 + a^2) \right) - \rho \cdot g \cdot h \cdot (\pi \cdot r^2) = m \cdot g \Leftrightarrow$$

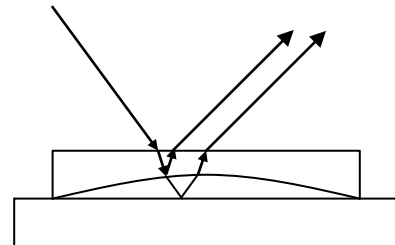
$$\frac{\rho \cdot g \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a \cdot (3r^2 + a^2) \right)}{\rho \cdot g \cdot (\pi \cdot r^2)} - \frac{\rho \cdot g \cdot h \cdot (\pi \cdot r^2)}{\rho \cdot g \cdot (\pi \cdot r^2)} = \frac{m \cdot g}{\rho \cdot g \cdot (\pi \cdot r^2)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho \cdot g \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a \cdot (3r^2 + a^2) \right)}{\rho \cdot g \cdot (\pi \cdot r^2)} - \frac{\rho \cdot g \cdot h \cdot (\cancel{\pi \cdot r^2})}{\rho \cdot g \cdot (\cancel{\pi \cdot r^2})} = \frac{m \cdot g}{\rho \cdot g \cdot (\pi \cdot r^2)}$$

$$\boxed{h = \frac{a \cdot (3r^2 + a^2)}{6 \cdot r^2} - \frac{m}{(\rho \cdot \pi \cdot r^2)}}$$

**QUESTÃO 04**

Sobre uma placa de vidro plana é colocada uma lente plano-côncava com 1,50 de índice de refração e concavidade de 8,00 m de raio voltada para baixo. Com a lente iluminada perpendicularmente de cima por uma luz de comprimento de onda de 589 nm (no ar), aparece um padrão de interferência com um ponto escuro central circundado por anéis, dos quais 50 são escuros, inclusive o mais externo na borda da lente. Este padrão de interferência aparece devido ao filme de ar entre a lente e a placa de vidro (como esquematizado na figura). A espessura da camada de ar no centro do padrão de interferência e a distância focal da lente são, respectivamente,



- a)  $14,7 \mu\text{m}$  e  $-10,0 \text{m}$ .
- b)  $14,7 \mu\text{m}$  e  $-16,0 \text{m}$ .
- c)  $238 \mu\text{m}$  e  $-8,00 \text{m}$ .
- d)  $35,2 \mu\text{m}$  e  $16,0 \text{m}$ .
- e)  $29,4 \mu\text{m}$  e  $-16,0 \text{m}$ .

**Resolução**

**Alternativa B**

Sendo  $e$  a espessura do filme de ar, que é variável, queremos o padrão de interferências destrutivas.

A diferença de caminhos será  $\Delta x = 2e$ .

Como há uma inversão de fase na reflexão do ar para o vidro e não há na reflexão do vidro para o ar, então segue que:

$$\Delta x = m \cdot \lambda_{\text{ar}}, \text{ com } m \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 50\}.$$

Observação:  $m = 0$  representa a situação em que  $e \ll \lambda_{\text{ar}}$  (na borda da lente), ou seja, quando  $e$  tende a zero.

Calculando a espessura da camada de ar no centro ( $m = 50$ ):

$$2e = 50 \cdot \lambda_{\text{ar}} \Rightarrow 2e = 50 \cdot 589 \Leftrightarrow e = 14726 \text{ nm}$$

$$\boxed{e \approx 14,7 \mu\text{m}}$$

Pela equação de Halley (dos fabricantes de lentes), temos:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{meio}}} - 1 \right)$$

Sendo:

$$R_1 = -8,00 \text{ m (face côncava)}$$

$$\frac{1}{R_2} = 0 \text{ (face plana)}$$

$$n_{\text{lente}} = 1,50$$

$$n_{\text{meio}} = 1,00 \text{ (ar)}$$

Temos:

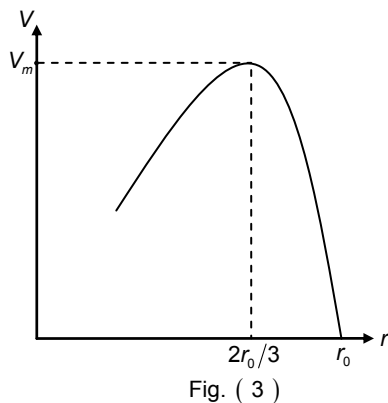
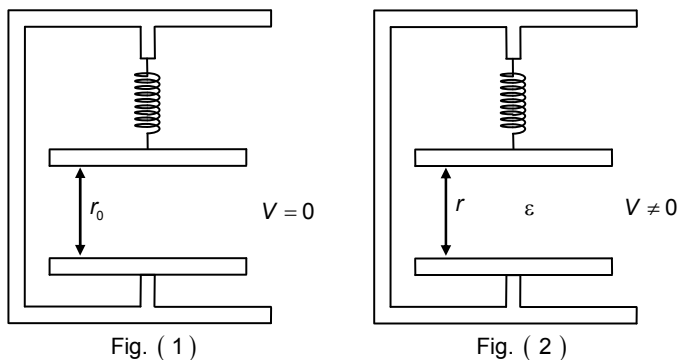
$$\frac{1}{f} = \left( \frac{1}{-8,00} + 0 \right) \left( \frac{1,50}{1,00} - 1 \right)$$

$$\boxed{f = -16,0 \text{ m}}$$

**QUESTÃO 05**

Um capacitor de placas planas paralelas de área  $A$ , separadas entre si por uma distância inicial  $r_0$  muito menor que as dimensões dessa área, tem sua placa inferior fixada numa base isolante e a superior suspensa por uma mola (figura (1)). Dispondo-se de uma massa  $m$  sobre a placa superior, resultam pequenas oscilações de período  $T$  do conjunto placa superior + massa  $m$ . Variando-se  $m$ , obtém-se um

gráfico de  $T^2$  versus  $m$ , do qual, após ajuste linear, se extrai o coeficiente angular  $\alpha$ . A seguir, após remover a massa  $m$  da placa superior e colocando entre as placas um meio dielétrico sem seguir, após remover a massa  $m$  da placa superior e colocando entre as placas um meio dielétrico sem resistência ao movimento, aplica-se entre elas uma diferença de potencial  $V$  e monitora-se a separação  $r$  de equilíbrio (figuras (2) e (3)). Nessas condições, a permissividade  $\epsilon$  do meio entre as placas é



- a)  $32\pi^2 r_0^3 / (27\alpha AV_m^2)$ .
- b)  $16\pi^2 r_0^3 / (27\alpha AV_m^2)$ .
- c)  $8\pi^2 r_0^3 / (27\alpha AV_m^2)$ .
- d)  $4\pi^2 r_0^3 / (\alpha AV_m^2)$ .
- e)  $16\pi^2 r_0^3 / (27\alpha AV_m^2)$ .

**Resolução**

**Alternativa A**

Este problema pode ser dividido em duas situações. A primeira situação engloba a oscilação do sistema massa-mola. A segunda situação engloba o capacitor carregado.

**Primeira situação:** no movimento harmônico, sabemos que o período de oscilação é dado por  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$ , onde  $m$  é a massa sobre a placa,  $M$  é a massa da placa e  $k$  é o coeficiente elástico da mola. No experimento, variou-se a massa  $m$  e foi obtido um gráfico de  $T^2$  versus  $m$ .

$T^2$  é dado por:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m+M}{k} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{k}(m+M) = \frac{4\pi^2}{k}m + \frac{4\pi^2}{k}M$$

Nota-se, como informado no enunciado da questão, que a relação de  $T^2$  por  $m$  é linear, sendo uma equação de reta:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m + \frac{4\pi^2}{k}M \Leftrightarrow y = \alpha x + b$$

Onde  $\alpha$  é o coeficiente angular e  $b$  é o coeficiente linear. Assim, o coeficiente angular dessa reta é dado por

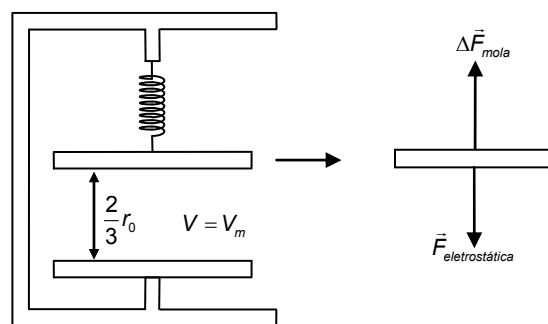
$$\alpha = \frac{4\pi^2}{k}$$

Para uso futuro, podemos expressar a rigidez da mola como função do coeficiente angular:

$$k = \frac{4\pi^2}{\alpha}$$

**Segunda situação:** agora, a massa  $m$  é retirada do sistema e coloca-se um dielétrico entre as placas. Aplica-se uma diferença de potencial entre as placas, que estavam distantes  $r_0$ , e monitora-se até a separação de equilíbrio,  $\frac{2}{3}r_0$ .

Quando um capacitor é submetido a uma diferença de potencial, suas placas acumulam cargas de sinais opostos. A placa superior (móvel) é, então, atraída pela placa inferior (fixa). No equilíbrio, teremos que a variação da força exercida pela mola na placa superior é igual à força de atração entre as placas, como mostra a figura abaixo:



Assim,

$$\Delta F_{mola} = F_{eletrostática} \Rightarrow k\Delta r = qE$$

Onde  $k$  é a rigidez da mola ( $k = \frac{4\pi^2}{\alpha}$ ),  $\Delta r$  é a variação de comprimento da mola até a condição de equilíbrio ( $\Delta r = r_0 - 2r_0/3 = r_0/3$ ),  $q$  é a carga acumulada na placa superior e  $E$  é o campo elétrico devido à carga acumulada na placa inferior. O campo elétrico  $E$  entre as placas paralelas de um capacitor pode ser expresso pela diferença de potencial entre as placas e a distância entre as cargas, dada por

$$V = Ed \Rightarrow E = \frac{V}{d}$$

Este campo é o resultado da sobreposição dos campos gerados pelas duas placas do capacitor. Como queremos apenas o campo gerado pela placa inferior, isto é, o campo que atinge a placa superior, então devemos adotar um fator de  $\frac{1}{2}$ . Sendo  $V$  a diferença de potencial entre as placas e  $d$  a distância separando-as, temos:

$$E = \frac{1}{2} \frac{V_m}{2r_0/3} = \frac{3V_m}{4r_0}$$

A carga  $q$  acumulada na placa superior pode ser expressa como  $q = CV_m$ , onde  $C$  é a capacitância do capacitor. Lembrando que a capacitância de um capacitor de placas paralelas é expressa como

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

Onde  $A$  é a área das placas,  $\epsilon$  é a permissividade do meio entre as placas e  $d$  é a distância entre as placas. Temos que:

$$C = \frac{\epsilon A}{2r_0/3} = \frac{3\epsilon A}{2r_0}$$

Assim, a carga na placa superior é:

$$q = \frac{3\epsilon AV_m}{2r_0}$$

Agora, podemos substituir esses valores na equação de equilíbrio estático na placa superior. Portanto,

$$k\Delta r = qE \Rightarrow \frac{4\pi^2}{\alpha} \cdot \frac{r_0}{3} = \frac{3\epsilon AV_m}{2r_0} \cdot \frac{3V_m}{4r_0}$$

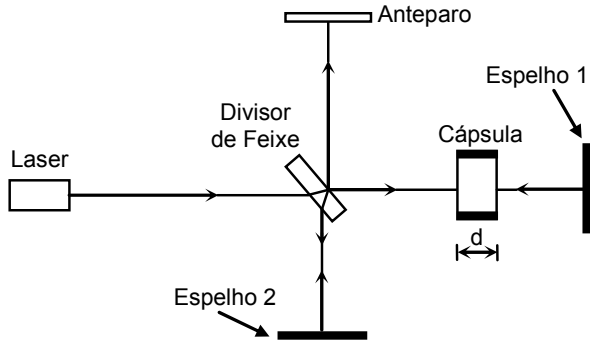
$$\frac{4\pi^2 r_0}{3\alpha} = \frac{9\epsilon AV_m^2}{8r_0^2} \Rightarrow$$

$$\epsilon = \frac{32\pi^2 r_0^3}{27\alpha AV_m^2}$$



**QUESTÃO 06**

A figura mostra um interferômetro de Michelson adaptado para determinar o índice de refração do ar. As características do padrão de interferência dos dois feixes incidentes no anteparo dependem da diferença de fase entre eles, neste caso, influenciada pela cápsula contendo ar. Reduzindo a pressão na cápsula de 1 atm até zero (vácuo), nota-se que a ordem das franjas de interferências sofre um deslocamento de  $N$ , ou seja, a franja de ordem 0 passa a ocupar o lugar de  $N$ , a franja de ordem 1 ocupa o lugar da ordem  $N+1$ , e assim sucessivamente. Sendo  $d$  a espessura da cápsula e  $\lambda$  o comprimento da onda da luz no vácuo, o índice de refração no ar é igual a



- a)  $N\lambda / d$ .
- b)  $N\lambda / (2d)$ .
- c)  $1 + N\lambda / d$ .
- d)  $1 + N\lambda / (2d)$ .
- e)  $1 - N\lambda / d$ .

**Resolução**

**Alternativa D**

Queremos calcular o índice de refração do ar:

$$n_{ar} = \frac{\lambda}{\lambda_{ar}}$$

Ao percorrer a espessura da cápsula duas vezes (ida e volta), a onda pode fazê-lo com dois comprimentos de onda diferentes:  $\lambda$  para a cápsula à vácuo e  $\lambda_{ar}$  para a cápsula com ar a 1 atm.

Quando à vácuo, a distância  $2d$  é igual a  $k$  comprimentos de onda  $\lambda$ , logo:

$$k = \frac{2d}{\lambda}$$

Com ar a 1 atm, a mesma distância  $2d$  é igual a  $(k + N)$  comprimentos de onda  $\lambda_{ar}$  (lembrando que  $\lambda_{ar} < \lambda$ ), sendo  $N$  o deslocamento das franjas de interferência. Assim:

$$k + N = \frac{2d}{\lambda_{ar}}$$

Unindo as equações:

$$\frac{2d}{\lambda} + N = \frac{2d}{\lambda_{ar}} \Rightarrow \lambda_{ar} = \frac{2d}{\frac{2d}{\lambda} + N} = \frac{\lambda}{1 + \frac{N\lambda}{2d}}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_{ar}} = 1 + \frac{N\lambda}{2d}$$

Pela definição de  $n_{ar}$ :

$$n_{ar} = 1 + \frac{N\lambda}{2d}$$

**QUESTÃO 07**

É muito comum a ocorrência de impurezas em cristais semicondutores. Em primeira aproximação, a energia de ionização dessas impurezas pode ser calculada num modelo semelhante ao do átomo de hidrogênio. Considere um semicondutor com uma impureza de carga  $+e$  atraindo um elétron de carga  $-e$ . Devido a interações com os átomos da rede cristalina, o elétron, no semicondutor, possui uma massa igual a  $m_r m_0$ , em que  $m_0$  é a massa de repouso do

elétron e  $m_r$ , uma constante adimensional. O conjunto impureza/elétron está imerso no meio do semicondutor de permissividade relativa  $\epsilon_r$ . A razão entre a energia de ionização desta impureza e a energia de ionização do átomo de hidrogênio é igual a

- a) 1.
- b)  $\frac{m_r}{\epsilon_r^2}$
- c)  $\frac{\epsilon_r^2}{m_r}$
- d)  $\frac{m_r}{\epsilon_r}$
- e)  $\frac{\epsilon_r}{m_r}$

**Resolução**

**Alternativa B**

O elétron do átomo de hidrogênio, segundo Bohr, orbita o núcleo em órbita circular e possui o momento angular quantizado, ou seja

$$L = m_0 \cdot v \cdot r = n \cdot \hbar; n=0,1,2,3... (1)$$

Cálculo da energia do elétron para o átomo de Bohr (caso do hidrogênio):

$$E = E_{potencial} + E_{cinética}$$

A energia potencial é dada por

$$E_{potencial} = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} (2)$$

A energia cinética é dada por

$$E_{cinética} = \frac{m_0 \cdot v^2}{2} (3)$$

Como estamos em órbita circular a resultante centrípeta no elétron é dada por:

$$\frac{m_0 \cdot v^2}{r} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} (4)$$

Substituindo (4) em (3) verificamos que  $E_{cinética} = -\frac{E_{potencial}}{2}$

O que significa que a energia do elétron é dada por:

$$E = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2 \cdot r} (5)$$

E de (4) temos que:

$$v = \sqrt{\frac{1}{m_0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}}$$

Substituindo (4) em (1) obtemos

$$\sqrt{\frac{m_0 \cdot e^2 \cdot r}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}} = n \cdot \hbar \Rightarrow r(n) = \frac{n^2 \cdot \hbar^2}{m_0 \cdot e^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 (6)$$

De (5) e (6) temos que a energia do elétron no átomo de hidrogênio é

$$E = -\frac{1}{(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)^2} \cdot \frac{e^4}{2 \cdot n^2 \cdot \hbar^2} \cdot m_0$$

Como a questão diz que a energia de ionização de impurezas em cristais semicondutores pode ser calculada num modelo semelhante ao do átomo de hidrogênio, e que a massa do elétron é  $m = m_r \cdot m_0$  e que a permissividade relativa  $\epsilon_r$  e que as cargas envolvidas são  $+e$  e  $-e$  então a energia de ionização da impureza será dada por:

$$E_{impureza} = -\frac{1}{(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0)^2} \cdot \frac{e^4}{2 \cdot n^2 \cdot \hbar^2} \cdot m_r \cdot m_0$$

Portanto a relação entre as energias será

$$\frac{E_{impureza}}{E} = \frac{m_r}{\epsilon_r^2}$$

**QUESTÃO 08**

Considere um capacitor de placas paralelas ao plano  $yz$  tendo um campo elétrico de intensidade  $E$  entre elas, medido por um referencial  $S$  em repouso em relação ao capacitor. Dois outros referenciais,  $S'$  e  $S''$ , que se movem com velocidade de módulo  $v$  constante em relação a  $S$  nas direções de  $x$  e  $y$ , nesta ordem, medem as respectivas intensidades  $E'$  e  $E''$  dos campos elétricos entre as

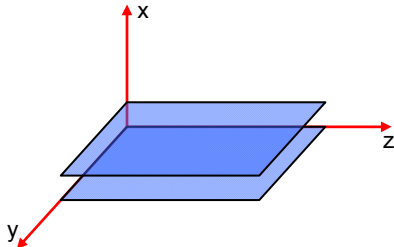
placas do capacitor. Sendo  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ , pode-se dizer que  $\frac{E'}{E}$  e

$\frac{E''}{E}$  são, respectivamente, iguais a

- a) 1 e 1.                      b)  $\gamma$  e 1.                      c) 1 e  $\gamma$ .  
d)  $\gamma$  e  $\frac{1}{\gamma}$ .                      e) 1 e  $\frac{1}{\gamma}$ .

**Resolução** **Alternativa C**

A figura abaixo representa a situação proposta pelo enunciado.



Denotaremos a distância entre as placas do capacitor por  $d_0$  e a área das placas por  $A_0$ , para o referencial S.

Para um referencial inercial o campo elétrico entre as placas de um capacitor ideal é dado por:

$$E = \frac{Q}{\epsilon \cdot A}$$

Onde Q é a carga acumulada no capacitor,  $\epsilon$  é a permissividade elétrica do meio e A é a área das placas do capacitor.

No referencial S', que possui velocidade na direção x, a distância  $d_0$  entre as placas do capacitor diminui, o que não afeta o campo elétrico. Então, como a carga elétrica acumulada e a permissividade do meio também não se alteram, temos:

$$\frac{E'}{E} = 1$$

No referencial S'', que possui velocidade na direção y, a área das placas do capacitor se altera, pois seu comprimento em y diminui. A nova área fica:

$$A'' = \frac{A_0}{\gamma}$$

Dessa forma teremos:

$$E'' = \frac{Q}{\epsilon \cdot A''} \Rightarrow E'' = \frac{Q \cdot \gamma}{\epsilon \cdot A_0}$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{Q \cdot \gamma}{\epsilon \cdot A_0} \cdot \frac{\epsilon \cdot A_0}{Q} \Leftrightarrow \frac{E''}{E} = \gamma$$

Obs: É importante notar que as relações são válidas para capacitores de qualquer formato, contanto que apresentem placas paralelas.

**QUESTÃO 09**

Considere as afirmações a seguir:

- I. Em equilíbrio eletrostático, uma superfície metálica é equipotencial.
- II. Um objeto eletrostaticamente carregado induz uma carga uniformemente distribuída numa superfície metálica próxima quando em equilíbrio eletrostático.
- III. Uma carga negativa desloca-se da região de maior para a de menor potencial elétrico.
- IV. É nulo o trabalho para se deslocar uma carga teste do infinito até o ponto médio entre duas cargas pontuais de mesmo módulo e sinais opostos.

Das afirmações, é (são) correta(s) somente

- a) I e II.  
b) I, II e III.  
c) I, II e IV.  
d) I e IV.  
e) III.

**Resolução** **Alternativa D**

Podemos analisar cada afirmação como segue:

**I. Correta.** Equilíbrio eletrostático implica não haver corrente elétrica. Para tal, a superfície metálica deve ser equipotencial, já que  $\Delta V = Ri$ .

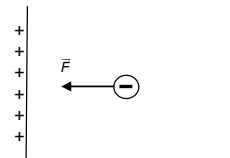
**II. Incorreta.** Um metal é caracterizado pela ligação metálica de seus átomos, que possibilita grande mobilidade dos elétrons de valência. Assim, quando um objeto eletrostaticamente carregado induz carga numa superfície metálica, nada mais ocorre do que o movimento desses elétrons.

Quando um objeto positivamente carregado é aproximado de uma superfície metálica, os elétrons são atraídos e acumulam-se nas proximidades da carga (região eletricamente carregada), deixando uma região do metal com falta de elétrons (região positivamente carregada).

Quando um objeto negativamente carregado é aproximado de uma superfície metálica, os elétrons são repelidos e acumulam-se numa região afastada da carga (região eletricamente carregada), deixando a região do metal próxima à carga com falta de elétrons (região positivamente carregada).

Assim, as cargas não se distribuem uniformemente na superfície metálica.

**III. Incorreta.** Imaginando que uma carga negativa encontra-se entre duas placas carregadas, como mostra a figura abaixo:



A carga negativa é atraída para a placa positivamente carregada, que tem maior potencial que a placa negativamente carregada.

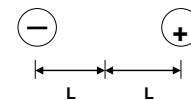
**IV. Correta.** O trabalho para uma carga teste (positiva) ser deslocada entre dois pontos quaisquer é dado por  $W = q\Delta V$ , onde q é a carga da partícula e  $\Delta V$  é a diferença de potencial entre os dois pontos onde a carga teste se situa.

Como a carga teste está no infinito, assumimos que seu potencial seja nulo, ou seja,  $V_i = V_\infty = 0$ .

Entre as cargas pontuais, calculamos o potencial final,  $V_f$ , de acordo

com a relação  $V = \frac{Kq}{d}$ , onde K é a constante de Coulomb, q é a carga

da partícula com relação a qual o potencial é calculado e d é a distância da partícula ao ponto de interesse. A figura abaixo mostra a disposição das partículas.



Assim, o potencial na configuração final é dado pela soma do potencial no ponto médio devido a cada carga. Portanto,

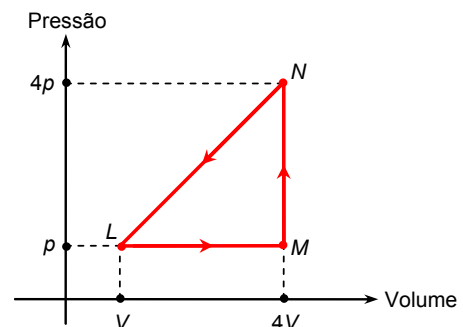
$$V_f = V_+ + V_- = +\frac{Kq}{L} - \frac{Kq}{L} = 0$$

O trabalho fica dado por

$$W = q \cdot (V_f - V_0) = 0$$

**QUESTÃO 10**

Um recipiente contém um gás monoatômico ideal inicialmente no estado L, com pressão p e volume V. O gás é submetido a uma transformação cíclica LMNL, absorvendo de uma fonte quente uma quantidade de calor  $Q_1$  e cedendo a uma fonte fria uma quantidade de calor  $Q_2$ . Pode-se afirmar que  $Q_1$  é igual a



- a)  $30pV$ .                      b)  $51pV/2$ .                      c)  $8pV$ .  
d)  $15pV/2$ .                      e)  $9pV/2$ .

**Resolução**

**Sem Resposta**

Pelo ciclo termodinâmico apresentado no gráfico, percorrido no sentido anti-horário, observamos que se trata de um refrigerador, ou seja, um dispositivo que **absorve calor de uma fonte fria e rejeita calor para uma fonte quente**, à custa de trabalho externo realizado sobre o sistema.

Assim, o enunciado apresentado é incoerente, pois descreve que o calor está sendo absorvido da fonte quente e rejeitado para a fonte fria, o que corresponderia ao funcionamento de uma máquina térmica e não de um refrigerador. Se fosse o caso (de uma máquina térmica), o ciclo deveria estar sendo percorrido no sentido horário, e não no anti-horário.

Observe que, em cada trecho, temos:

- Trecho LM:

$$\begin{cases} \tau_{LM} = p \cdot (4V - V) = 3pV \\ \Delta U_{LM} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot 4V - \frac{3}{2} \cdot p \cdot V = \frac{9}{2} pV \end{cases} \Rightarrow Q_{LM} = \tau_{LM} + \Delta U_{LM} = \frac{15}{2} pV$$

- Trecho MN:

$$\begin{cases} \tau_{MN} = 0 \text{ (isométrica)} \\ \Delta U_{MN} = \frac{3}{2} \cdot 4p \cdot 4V - \frac{3}{2} \cdot p \cdot 4V = 18pV \end{cases} \Rightarrow Q_{MN} = \tau_{MN} + \Delta U_{MN} = 18pV$$

- Trecho NL:

$$\begin{cases} \tau_{NL} = -\frac{(4p + p) \cdot (4V - V)}{2} = -\frac{15}{2} pV \\ \Delta U_{NL} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot V - \frac{3}{2} \cdot 4p \cdot 4V = -\frac{45}{2} pV \end{cases} \Rightarrow Q_{NL} = \tau_{NL} + \Delta U_{NL} = -30pV$$

Diante disso, calculamos os calores trocados com a fonte fria (calor absorvido) e com a fonte quente (calor rejeitado):

(I) calor  $Q_C$  absorvido da fonte fria é dado por:

$$Q_C = Q_{LM} + Q_{MN} = \frac{15}{2} pV + 18pV \Leftrightarrow Q_C = \frac{51}{2} pV$$

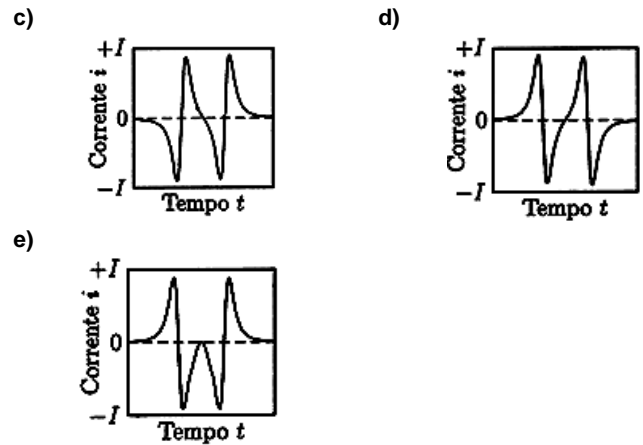
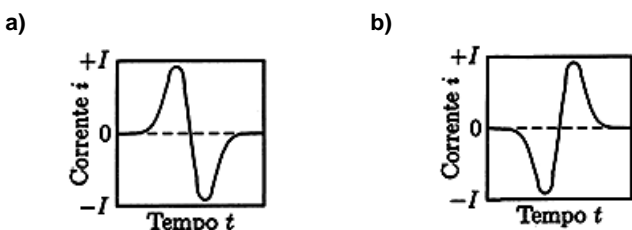
(II) calor  $Q_H$  absorvido da fonte quente é dado por:

$$Q_H = Q_{NL} \Leftrightarrow Q_H = -30pV$$

Assim, dada a inconsistência do enunciado, somada ao fato de os dois valores calculados acima estarem presentes nas alternativas (um deles em módulo), propomos a anulação da questão.

**QUESTÃO 11**

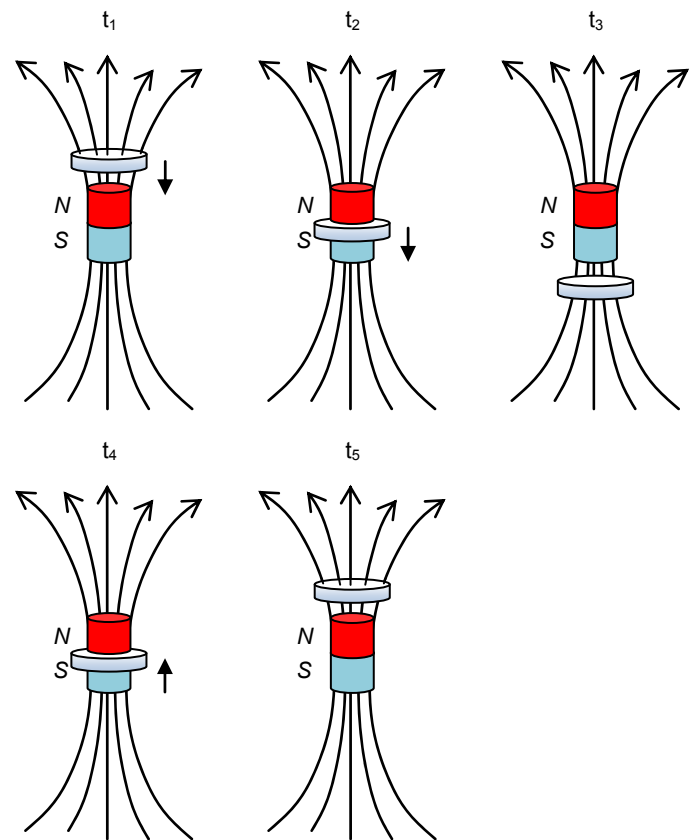
Considere um ímã cilíndrico vertical com o pólo norte para cima, tendo um anel condutor posicionado acima do mesmo. Um agente externo imprime um movimento ao anel que, partindo do repouso, desce verticalmente em torno do ímã e atinge uma posição simétrica à original, iniciando, logo em seguida, um movimento ascendente e retornando à posição inicial em repouso. Considerando o eixo de simetria do anel sempre coincidente com o ímã e sendo positiva a corrente no sentido anti-horário (visto por um observador de cima), o gráfico que melhor representa o comportamento da corrente induzida  $i$  no anel é



**Resolução**

**Alternativa C**

O que foi descrito no enunciado está representado na figura a seguir com os respectivos instantes  $t_1, t_2, \dots, t_5$ .

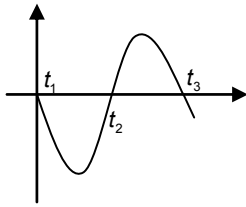


No instante  $t_1$  inicial, o anel se aproxima do ímã produzindo um aumento do fluxo do campo magnético com o campo apontando para cima. Pela Lei de Lenz, surge uma f.c.e.m. no sentido de impedir este aumento, produzindo uma corrente no sentido horário quando observado de cima (pela regra da mão direita, sentido negativo do adotado pelo enunciado).

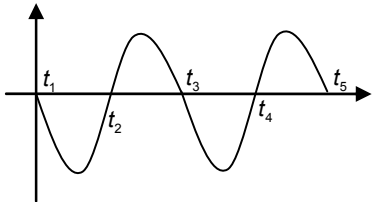
Em  $t_2$  não há fluxo de campo, o que implica que a corrente é zero, ou seja, o gráfico atinge um mínimo e começa a subir, pois logo após este instante o fluxo começa a diminuir e a corrente induzida surge no sentido de impedir esta variação (pela regra da mão direita, a corrente está no sentido anti-horário, ou seja, positivo).

Em  $t_3$  a velocidade do ímã se inverte (ponto extremo inferior do movimento do ímã). Imediatamente antes desta inversão a corrente é positiva (regra da mão direita: sentido anti-horário), e imediatamente depois passa a ser em sentido negativo.

Observe o gráfico qualitativo abaixo:



Continuando a discussão, obtemos que em  $t_4$  a corrente passa pelo valor nulo, indo do negativo para o positivo; entre  $t_4$  e  $t_5$  ela aumenta, mantendo-se positiva, atinge um máximo e volta a zero no instante  $t_5$ . Obtemos então o seguinte gráfico, aproximado:

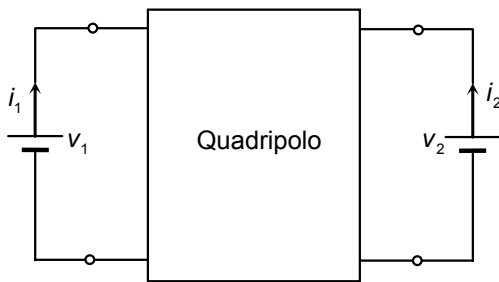


**QUESTÃO 12**

Um circuito elétrico com dois pares de terminais é conhecido como quadripolo. Para um quadripolo passivo, as tensões medidas em cada par de terminais podem ser expressas em função das correntes mediante uma matriz de impedância  $Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$ , de tal forma que:

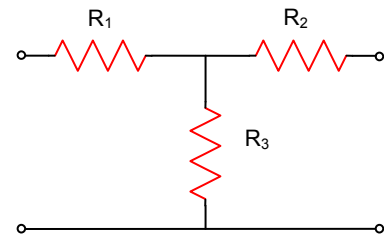
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \text{ Dos quadripolos propostos nas alternativas seguintes, assinale aquele cuja matriz de impedância seja } \begin{bmatrix} 4 \Omega & 2 \Omega \\ 2 \Omega & 3 \Omega \end{bmatrix}.$$

assinale aquele cuja matriz de impedância seja  $\begin{bmatrix} 4 \Omega & 2 \Omega \\ 2 \Omega & 3 \Omega \end{bmatrix}$ .



- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

**Resolução** **Alternativa D**  
Vamos começar este problema analisando o circuito a seguir e encontrar a matriz de impedância:



À direita, comparando com o enunciado, é aplicado um potencial  $v_1$  e à esquerda um potencial  $v_2$ , a corrente em  $R_1$  é  $i_1$  e em  $R_2$  é  $i_2$ . Observe que a corrente que passa por  $R_3$  é  $i_1 + i_2$ , assim:

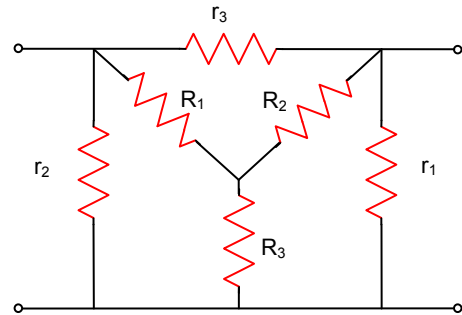
$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + R_3 (i_1 + i_2) \\ v_2 = R_2 i_2 + R_3 (i_1 + i_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (R_1 + R_3) i_1 + R_3 i_2 \\ v_2 = R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow Z = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$$

Observe que:

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \Omega & 2 \Omega \\ 2 \Omega & 3 \Omega \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 + R_3 = 4 \Omega \\ R_3 = 2 \Omega \\ R_2 + R_3 = 3 \Omega \end{cases}$$

Com isso, obtemos que  $R_1 = R_3 = 2 \Omega$  e  $R_2 = 1 \Omega$ .

Com este resultado, eliminamos as alternativas A, B e C. Aplicando-se a transformação delta-estrela nas alternativas D e E:



Pela relação de transformação delta-estrela, temos:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \\ R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \\ R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3} \end{cases}$$

Calculando os equivalentes para a letra D, temos  $R_1 = R_3 = 2 \Omega$  e  $R_2 = 1 \Omega$ , que é exatamente os valores que procurávamos.

Calculando também para a letra E, obtemos  $R_1 = R_2 = 2 \Omega$  e  $R_3 = 1 \Omega$ .

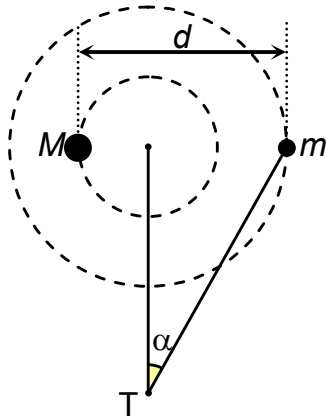
Portanto, a alternativa **D** propõe um quadripolo cuja matriz de impedância é  $\begin{bmatrix} 4 \Omega & 2 \Omega \\ 2 \Omega & 3 \Omega \end{bmatrix}$ .

**QUESTÃO 13**

Um sistema binário é formado por duas estrelas esféricas de respectivas massas  $m$  e  $M$ , cujos centros distam  $d$  entre si, cada qual descrevendo um movimento circular em torno do centro de massa desse sistema. Com a estrela de massa  $m$  na posição mostrada na figura, devido ao efeito Doppler, um observador  $T$  da Terra detecta uma raia do espectro do hidrogênio, emitida por essa estrela, com frequência natural  $f_0$ . Considere a Terra em repouso em relação ao centro de massa do sistema e que o movimento das estrelas ocorre no mesmo plano de observação. Sendo as velocidades das estrelas muito menores que  $c$ , assinale a alternativa que explicita o valor



absoluto de  $(f - f_0) / f_0$ . Se necessário, utilize  $(1 + x)^n \cong 1 + nx$  para  $x \ll 1$ .

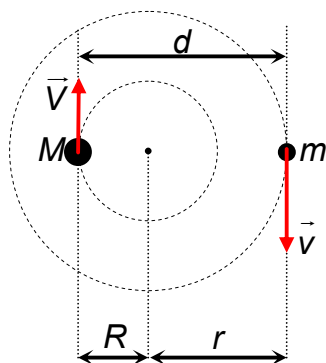


- a)  $\sqrt{GM^2 / [d(M+m)c^2]}$
- b)  $\sqrt{Gm^2 \sin^2 \alpha / [d(M+m)c^2]}$
- c)  $\sqrt{Gm^2 \cos^2 \alpha / [d(M+m)c^2]}$
- d)  $\sqrt{GM^2 \sin^2 \alpha / [d(M+m)c^2]}$
- e)  $\sqrt{Gm^2 \cos^2 \alpha / [d(M+m)c^2]}$

**Resolução**

**Alternativa E**

O exercício trata de efeito Doppler com a fonte em movimento. Devemos, portanto, encontrar a velocidade da fonte em função dos parâmetros oferecidos nas alternativas. A figura abaixo ilustra o movimento circular dos dois corpos em torno do centro de massa do sistema.



Devemos primeiro encontrar a distância  $r$  entre a massa que emite a radiação e o centro de massa em torno do qual ela gira. Denotando o centro de massa como a origem de um sistema de coordenadas teremos:

$$0 = -R \cdot M + r \cdot m \Rightarrow R = r \cdot \frac{m}{M}$$

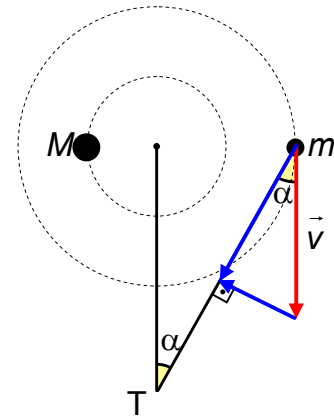
Como  $R + r = d$ , então:

$$d = r \cdot \frac{m}{M} + r \Rightarrow d = r \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right) \Rightarrow r = \frac{d \cdot M}{M + m}$$

Se a atração gravitacional entre as massas é responsável pela aceleração centrípeta da estrela, então:

$$\frac{G \cdot M}{d^2} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{d^2} \cdot \frac{d \cdot M}{(M + m)} \Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M^2}{d(M + m)} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M^2}{d(M + m)}}$$

Para o efeito Doppler consideraremos apenas a componente da velocidade que aponta na direção da terra.



A componente que nos interessa é dada por  $v_T = v \cdot \cos \alpha$ , então:

$$v_T = \sqrt{\frac{G \cdot M^2 \cdot \cos^2 \alpha}{d(M + m)}}$$

Como a velocidade da luz independe de referencial e é muito maior que a dos corpos envolvidos, podemos utilizar:

$$f = f_0 \cdot \frac{c}{c \pm v_T}$$

Escrevendo o que nos foi pedido:

$$\frac{(f - f_0)}{f_0} = \frac{f}{f_0} - 1 = \frac{c}{c \pm v_T} - 1 = \frac{c - c \mp v_T}{c \pm v_T} = \mp \frac{v_T}{c \pm v_T}$$

Como  $v_T \ll c$ :

$$\frac{(f - f_0)}{f_0} = \mp \frac{v_T}{c} \Rightarrow \left| \frac{(f - f_0)}{f_0} \right| = \sqrt{\frac{G \cdot M^2 \cdot \cos^2 \alpha}{d(M + m)c^2}}$$

**QUESTÃO 14**

Uma luz monocromática incide perpendicularmente num plano com três pequenos orifícios circulares formando um triângulo equilátero, acarretando um padrão de interferência em um anteparo paralelo ao triângulo, com o máximo de intensidade num ponto  $P$  equidistante dos orifícios. Assinale as respectivas reduções da intensidade luminosa em  $P$  com um e dois orifícios tampados.

- a)  $\frac{4}{9}$  e  $\frac{1}{9}$
- b)  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{1}{3}$
- c)  $\frac{8}{27}$  e  $\frac{1}{27}$
- d)  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$
- e)  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{9}$

**Resolução**

**Alternativa A**

Seja  $A$  a amplitude da onda que chega no ponto  $P$  devido a um único orifício. Assim, para os três orifícios teríamos uma interferência com amplitude  $3A$  e para o caso de dois orifícios, a amplitude será  $2A$ . Como a intensidade luminosa depende do quadrado da amplitude, temos:

$$I_1 = cA^2 \text{ para um orifício não tampado;}$$

$$I_2 = c(2A)^2 = 4cA^2 \text{ para dois orifícios não tampados;}$$

$$I_3 = c(3A)^2 = 9cA^2 \text{ para três orifícios não tampados.}$$

Assim, as respectivas razões das intensidades luminosa em  $P$  com dois ( $I_2$ ) e um ( $I_1$ ) orifícios não tampados será:

$$\frac{I_2}{I_3} = \frac{4}{9} \text{ e } \frac{I_1}{I_3} = \frac{1}{9}$$

Observe que o enunciado fala das reduções das intensidades, assim teríamos outra resposta:

$$\frac{I_3 - I_2}{I_3} = \frac{5}{9} \text{ e } \frac{I_3 - I_1}{I_3} = \frac{8}{9}$$

Como não há alternativa que satisfaça essa resposta, assumimos que o que se procurou abordar no enunciado foi a razão entre as intensidades final e inicial ("redução para"), e não a redução da intensidade pela intensidade inicial ("redução de").

**QUESTÃO 15**

Pode-se associar a segunda lei da Termodinâmica a um princípio de degradação da energia. Assinale a alternativa que melhor justifica esta associação.

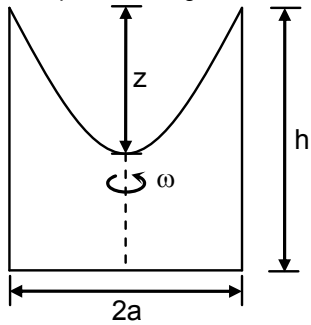
- a) A energia se conserva sempre.
- b) O calor não flui espontaneamente de um corpo quente para outro frio.
- c) Uma máquina térmica operando em ciclo converte integralmente trabalho em calor.
- d) Todo sistema tende naturalmente para o estado de equilíbrio.
- e) É impossível converter calor totalmente em trabalho.

**Resolução** **Alternativa E**

Vamos julgar cada afirmação.  
**a) Incorreta.** A conservação da energia é tema do enunciado da Primeira Lei da Termodinâmica, não da Segunda.  
**b) Incorreta.** O calor, de fato, flui espontaneamente de um corpo mais quente para outro mais frio.  
**c) Incorreta.** Uma máquina térmica é um dispositivo que, operando em ciclos, tem como função absorver calor de uma fonte quente e converter esse calor em trabalho. Um dos enunciados da Segunda Lei da Termodinâmica diz que essa conversão nunca é integral (100%), ou seja, não existem máquinas térmicas perfeitas.  
**d) Incorreta.** A Segunda Lei da Termodinâmica, num de seus vários enunciados equivalentes, diz que os processos termodinâmicos que ocorrem espontaneamente são aqueles que tendem a estados de maior desordem.  
**e) Correta.** De fato, um dos enunciados da Segunda Lei da Termodinâmica afirma que é impossível construir uma máquina térmica perfeita, ou seja, é impossível construir um dispositivo que, operando em ciclos, consiga converter calor integralmente em trabalho.

**QUESTÃO 16**

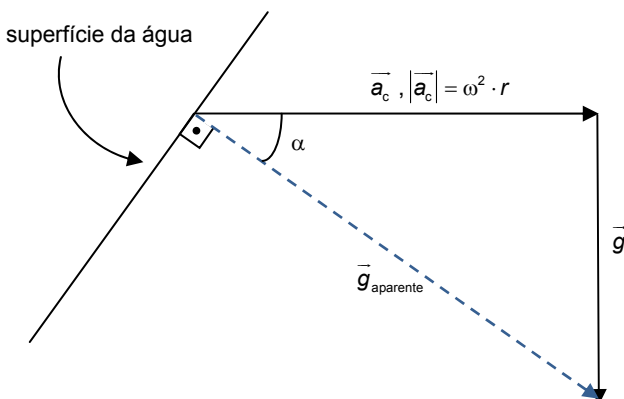
Um cilindro de altura  $h$  e raio  $a$ , com água até uma certa altura, gira com velocidade angular  $\omega$  constante. Qual o valor máximo de  $\omega$  para que a água não transborde, sabendo que neste limite a altura  $z$  (ver figura) é igual a  $h/3 + \omega^2 a^2 / (4g)$ ? Dado: num referencial que gira com o cilindro, e, portanto, considerado a força centrífuga, todos os pontos da superfície da água têm a mesma energia potencial.



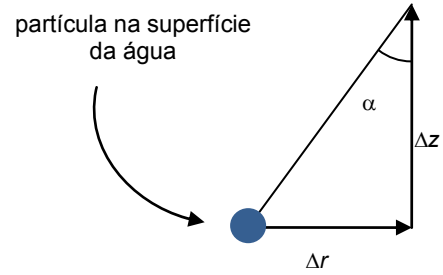
- a)  $\omega = \sqrt{2gh / (3a^2)}$
- b)  $\omega = \sqrt{4ga / (9h^2)}$
- c)  $\omega = \sqrt{4ga / (3h^2)}$
- d)  $\omega = \sqrt{4gh / (3a^2)}$
- e)  $\omega = \sqrt{4gh / (9a^2)}$

**Resolução** **Alternativa D**

Ao olharmos uma partícula de água da superfície de um referencial que gira com o cilindro (um referencial não inercial), situada a uma distância horizontal do centro do cilindro igual a  $r$ , teremos a gravidade agindo verticalmente e uma aceleração centrífuga agindo horizontalmente, de dentro para fora, como no esquema a seguir:



Seria interessante calcular a altura  $z$  em função das variáveis do problema, e, por isso, vamos somar variações de altura  $\Delta z$  ao longo da curva, fazendo então com que  $\Delta z \rightarrow 0$ , situação em que estaremos integrando nossa função. A figura abaixo ilustra as variações de altura  $\Delta z$ :



Como  $\text{tg} \alpha = \frac{g}{\omega^2 \cdot r} = \frac{\Delta r}{\Delta z} \Rightarrow \Delta z = \frac{\Delta r \cdot \omega^2 \cdot r}{g}$ , a altura  $z$  é a integral:

$$z = \int_0^a \frac{\omega^2 \cdot r}{g} dr = \frac{\omega^2 \cdot a^2}{2 \cdot g}$$

Substituindo o valor de  $z$  dado no enunciado, temos:

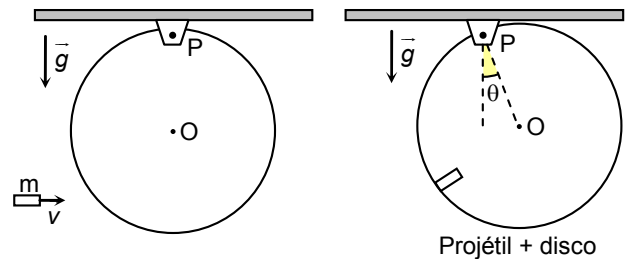
$$\frac{h}{3} + \frac{\omega^2 \cdot a^2}{4 \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot a^2}{2 \cdot g} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{4gh}{3a^2}}$$

**QUESTÃO 17**

Um disco rígido de massa  $M$  e centro  $O$  pode oscilar sem atrito num plano vertical em torno de uma articulação  $P$ . O disco é atingido por um projétil de massa  $m \ll M$  que se move horizontalmente com velocidade  $\vec{v}$  no plano do disco. Após a colisão, o projétil se incrusta no disco e o conjunto gira em torno de  $P$  até o ângulo  $\theta$ . Nestas condições, afirmam-se:

- I. A quantidade de movimento do conjunto projétil+disco se mantém a mesma imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.
- II. A energia cinética do conjunto projétil+disco se mantém a mesma imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.
- III. A energia mecânica do conjunto projétil+disco imediatamente após a colisão é igual a da posição de ângulo  $\frac{\theta}{2}$ .

É (são) verdadeira(s) apenas a(s) assertiva(s)



- a) I.
- b) I e II.
- c) I e III.
- d) II e III.
- e) III.

**Resolução** **Alternativa E**

**I. Incorreta.** O sistema projétil+disco não pode ser considerado isolado para a quantidade de movimento durante a colisão, pois o pino em  $P$  provoca uma componente de força  $\vec{F}_x$  para a esquerda contrária à tendência de movimento do disco (para a direita), realizando um impulso de intensidade  $I = \vec{F}_x \cdot \Delta t$  externo no sistema, reduzindo a quantidade de movimento inicial:

$$Q_{\text{depois}} = Q_{\text{antes}} - F_x \cdot \Delta t$$

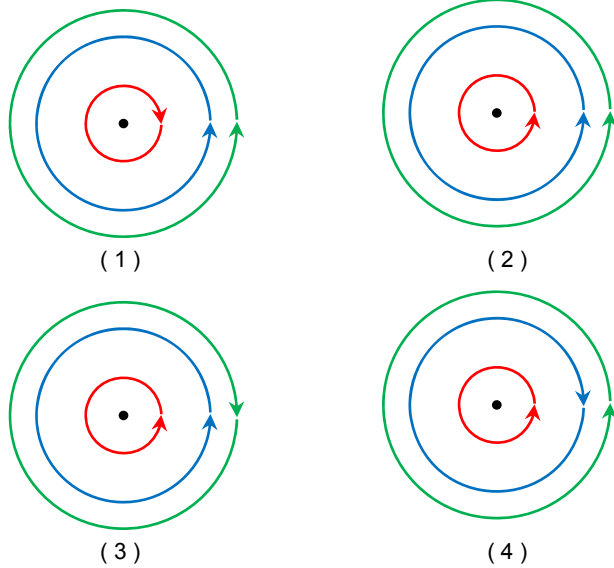
**Observação:** A componente vertical da força que o pino faz sobre o sistema será anulada pelo peso do disco e, portanto, seu impulso sobre o sistema também será anulado pelo peso do disco. O peso do projétil é desprezível.

**II. Incorreta.** A colisão é inelástica, liberando energia, principalmente por atrito do projétil com o disco e por deformação plástica (não elástica).

**III. Correta.** Após a colisão, a força que o pino faz sobre o sistema é sempre normal à superfície de contato (não há atrito), portanto essa força não realiza trabalho sobre o sistema. Assim, o campo gravitacional atuará de forma conservativa. A energia mecânica, portanto, é conservada em todo o movimento oscilatório.

**QUESTÃO 18**

As figuras mostram três espirais circulares concêntricas e coplanares percorridas por correntes de mesma intensidade  $I$  em diferentes sentidos. Assinale a alternativa que ordena corretamente as magnitudes dos respectivos campos magnéticos nos centros  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$ .

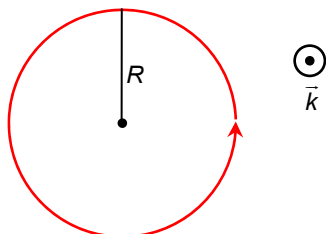


- a)  $B_2 > B_4 > B_3 > B_1$ .
- b)  $B_1 > B_4 > B_3 > B_2$ .
- c)  $B_2 > B_3 > B_4 > B_1$ .
- d)  $B_3 > B_2 > B_4 > B_1$ .
- e)  $B_4 > B_3 > B_2 > B_1$ .

**Resolução**

**Alternativa C**

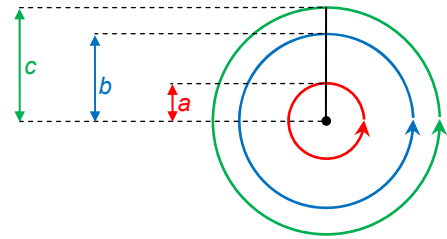
Vamos adotar um eixo  $z$  perpendicular ao plano da figura, orientado positivamente para fora (saindo) dela, com um versor  $\vec{k}$ .



O vetor indução magnética  $\vec{B}$  criado no centro de uma espira circular de raio  $R$  por uma corrente elétrica  $i$ , circulando no sentido anti-horário, é dado por:

$$\vec{B} = \left( \frac{\mu \cdot i}{2 \cdot R} \right) \vec{k}$$

Sejam  $a < b < c$  os raios das três espiras, como indicado na figura a seguir:



Temos que, usando o princípio da superposição:

- $\vec{B}_1 = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left( -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \vec{k}$
- $\vec{B}_2 = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \vec{k}$
- $\vec{B}_3 = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \vec{k}$
- $\vec{B}_4 = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \vec{k}$

Assim, os módulos dos vetores indução magnética em cada caso são dados por:

- $|\vec{B}_1| = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left| -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{a} \right|$
- $|\vec{B}_2| = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$
- $|\vec{B}_3| = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{c} \right)$
- $|\vec{B}_4| = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{b} \right)$

Como

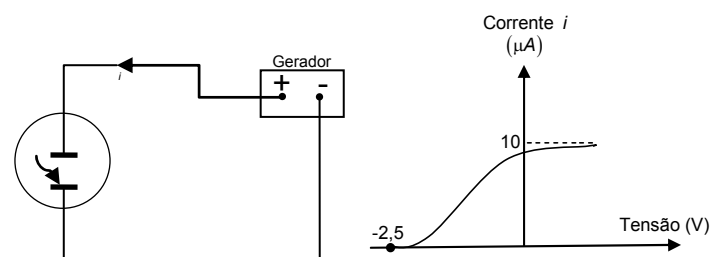
$$0 < a < b < c \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c} > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{a} < -\frac{2}{b} < -\frac{2}{c} < 0,$$

segue que:

$$|\vec{B}_2| > |\vec{B}_3| > |\vec{B}_4| > |\vec{B}_1|$$

**QUESTÃO 19**

Duas placas de um mesmo metal e com a mesma área de  $5,0 \text{ cm}^2$  paralelas e próximas entre si, são conectadas aos terminais de um gerador de tensão ajustável. Sobre a placa conectada ao terminal negativo, faz-se incidir radiação e, por efeito fotoelétrico, aparece uma corrente no circuito, cuja relação com a tensão aplicada é explicitada no gráfico. Sabendo que a função trabalho do metal é de  $4,1 \text{ eV}$  e assumindo que na região de saturação da corrente todo fóton incidente sobre a placa gera um fotoelétron que é coletado, a medida da intensidade dessa radiação em  $\mu\text{W}/\text{cm}^2$  é igual a



- a) 13.
- b) 8,2.
- c) 6,6.
- d) 3,2.
- e) 1,6.

**Resolução**

**Alternativa A**

A energia de um elétron que absorve um fóton de energia  $E$  e é emitido do metal é dividida em:

$$E = \phi + k$$

Onde  $\phi$  é a função trabalho do metal, ou seja, a energia mínima necessária que o elétron deve receber para se desprender do metal.  $E$   $K$  é a energia cinética do elétron emitido.

Pelo gráfico vemos que  $-2,5V$  é a tensão de corte do experimento; isso significa que o trabalho da força elétrica para levar um elétron de uma placa à outra, quando a tensão aplicada é  $2,5V$ , é igual à energia cinética do fóton no instante em que ele deixa o metal. Para este caso podemos dizer que a energia  $E$  do fóton incidente é, em eV:

$$E = 4,1eV + 2,5V \cdot |e| = 6,6eV$$

Como a corrente é dada por  $i = n \cdot e/t$ , temos que  $\frac{n}{t} = \frac{i}{e}$ , onde  $n$  é o número de elétrons, e  $t$  o tempo decorrido.

Como estamos na saturação, o número de fótons incidentes é igual ao número de elétrons desprendidos. Daí, a potência da radiação é dada por:

$$P = \frac{n \cdot E}{t}$$

E a intensidade é dada por:

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow I = \frac{n \cdot E}{t \cdot A} = \frac{i}{e} \cdot \frac{E}{A} \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{10 \cdot 6,6}{e} \cdot \frac{1}{5} \mu eV \cdot A/cm^2$$

Transformando as unidades:

$$I = 10 \cdot 6,6 \cdot \frac{1}{5} \mu W/cm^2 \Leftrightarrow \boxed{I = 13,2 \mu W/cm^2}$$

**QUESTÃO 20**

Uma amostra I de átomos de  $^{57}Fe$ , cujos núcleos excitados emitem fótons devido a uma transição nuclear, está situada a uma altura  $d$  verticalmente acima de uma amostra II de  $^{57}Fe$  que recebe a radiação emitida pela amostra I. Ao chegar a II, os fótons da amostra I sofrem um aumento de frequência devido à redução de sua energia potencial gravitacional, sendo, portanto, incapazes de excitar os núcleos de  $^{57}Fe$  dessa amostra. No entanto, essa incapacidade pode ser anulada se a amostra I se afastar verticalmente da amostra II com uma velocidade  $v$  adequada. Considerando  $v \ll c$  e que a energia potencial gravitacional do fóton de energia  $\varepsilon$  pode ser obtida mediante sua

“massa efetiva”  $\frac{\varepsilon}{c^2}$ , assinale a opção que explicita  $v$ . Se necessário, utilize  $(1+x)^n \cong 1+nx$  para  $x \ll 1$ .

- a)  $\sqrt{gd}$                       b)  $\frac{gd}{c}$                       c)  $2\sqrt{gd}$
- d)  $\frac{2gd}{c}$                       e)  $gd\sqrt{gd/c^2}$

**Resolução**

**Alternativa B**

O aumento de energia do fóton será o equivalente à sua diminuição de energia potencial gravitacional.

$$\Delta E = m \cdot g \cdot d$$

$$E_{II} - E_I = \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot g \cdot d$$

Para utilizar essa fórmula, é necessário considerar que a energia  $\varepsilon$  de um fóton varia muito pouco por efeitos gravitacionais, logo, a sua “massa efetiva” também é praticamente constante.

Em caso de dúvida, repare que infinitesimalmente, temos:

$$dE = m \cdot g \cdot dy = \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot g \cdot dy = \varepsilon \cdot \left( \frac{g \cdot dy}{c^2} \right)$$

Esse valor é ínfimo, perto de  $\varepsilon$ , pois denominador  $c^2$  é muito maior que o numerador  $g \cdot dy$ , e a altura  $y$  teria que variar de um valor altíssimo. Assim, a energia  $\varepsilon$  varia muito pouco proporcionalmente.

Para calcular o efeito Doppler, no entanto, é necessário encontrar as frequências inicial e final, que aparecem justamente em função das energias, pela relação  $E = h \cdot f$ :

$$E_{II} - E_I = \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot g \cdot d$$

$$h \cdot f_{II} - h \cdot f_I = \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot g \cdot d$$

$$f_{II} - f_I = \frac{\varepsilon \cdot g \cdot d}{c^2 \cdot h} \quad (1)$$

Como a velocidade da luz independe de referencial e é muito maior que a dos corpos envolvidos, podemos calcular o efeito Doppler na amostra II (observador se afastando e frequência incidente  $f_{II}$ ):

$$\frac{f_{II}'}{c-v} = \frac{f_{II}}{c-0}$$

Isolando  $v$  e lembrando que queremos  $f_{II}' = f_I$  (para excitar os núcleos de  $^{57}Fe$ ):

$$c-v = c \cdot \frac{f_{II}'}{f_{II}}$$

$$v = c \cdot \frac{(f_{II} - f_{II}')}{f_{II}}$$

$$v = c \cdot \frac{(f_{II} - f_I)}{f_{II}} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$v = c \cdot \frac{\left( \frac{\varepsilon \cdot g \cdot d}{c^2 \cdot h} \right)}{f_{II}}$$

$$v = \frac{\varepsilon \cdot g \cdot d}{c \cdot h \cdot f_{II}}$$

Voltando a lembrar que  $\varepsilon$  varia pouco, então podemos aproximar:

$$\varepsilon = h \cdot f_{II}$$

Logo:

$$v = \frac{h \cdot f_{II} \cdot g \cdot d}{c \cdot h \cdot f_{II}} \Rightarrow \boxed{v = \frac{g \cdot d}{c}}$$

**QUESTÃO 21**

No sistema de unidades atômicas de Hartree, as unidades de carga elétrica, de massa, de comprimento e de tempo podem ser representadas respectivamente por  $q_A$ ,  $m_A$ ,  $L_A$  e  $t_A$ . Neste sistema, a carga elétrica  $e$  do próton é igual a  $1 q_A$ , a massa do elétron  $m_0$  vale  $1 m_A$ , a constante de Planck reduzida  $\hbar$  é igual a  $1 m_A \cdot L_A^2 / t_A$  e a constante de Coulomb  $K_0 = 1 / (4\pi\epsilon_0)$  vale  $1 m_A \cdot L_A^3 / (q_A^2 \cdot t_A^2)$ .

Dados no SI:  $e = 1,6 \times 10^{-19} C$ .  $m_0 = 9,1 \times 10^{-31} kg$ .  $\hbar = 1,1 \times 10^{-34} J \cdot s$ .  $K_0 = 9,0 \times 10^9 N \cdot m^2 / C^2$ .

- a) Qual a medida em metros de um comprimento igual a  $1,0 L_A$ ?  
b) Qual a medida em segundos de um tempo igual a  $1,0 t_A$ ?

**Resolução**

Temos que:

$$\begin{cases} \hbar = \frac{m_A \cdot L_A^2}{t_A} & (I) \\ K_0 = \frac{m_A \cdot L_A^3}{q_A^2 \cdot t_A^2} & (II) \end{cases}$$

a) De (I), vem que:

$$t_A = \frac{m_A \cdot L_A^2}{\hbar}$$

Substituindo em (II), segue que:

$$K_0 = \frac{m_A \cdot L_A^3}{q_A^2 \cdot \left( \frac{m_A \cdot L_A^2}{\hbar} \right)^2} = \frac{\hbar^2}{q_A^2 \cdot m_A \cdot L_A} \Leftrightarrow L_A = \frac{\hbar^2}{q_A^2 \cdot m_A \cdot K_0}$$

Substituindo os valores, temos:

$$L_A = \frac{(1,1 \cdot 10^{-34})^2}{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,0 \cdot 10^9} \Leftrightarrow L_A = 5,8 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

b) Voltando à relação

$$t_A = \frac{m_A \cdot L_A^2}{h}$$

temos que:

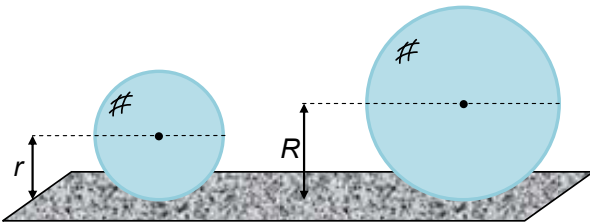
$$t_A = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (5,8 \cdot 10^{-11})^2}{1,1 \cdot 10^{-34}} \Leftrightarrow t_A = 2,8 \cdot 10^{-17} \text{ s}$$

**QUESTÃO 22**

Considere uma esfera maciça de raio  $r$ , massa  $m$ , coeficiente de dilatação volumétrica  $\alpha$ , feita de um material com calor específico a volume constante  $c_V$ . A esfera, sujeita à pressão atmosférica  $p$ , repousa sobre uma superfície horizontal isolante térmica e está inicialmente a uma temperatura  $T$  alta o suficiente para garantir que a sua energia interna não se altera em processos isotérmicos. Determine a temperatura final da esfera após receber uma quantidade de calor  $Q$ , sem perdas para o ambiente. Dê sua respostas em função de  $g$  e dos outros parâmetros explicitados.

**Resolução**

Temos a situação representada exageradamente na figura a seguir:



Se o coeficiente de dilatação volumétrica do material da esfera é  $\alpha$ , então seu coeficiente de dilatação linear será  $\alpha/3$ . Assim, o raio  $R$  se relaciona com o raio  $r$  através de:

$$R - r = r \cdot \frac{\alpha}{3} \cdot \Delta T$$

O trabalho realizado pela força peso contra a ascensão do centro de massa da esfera é dado por:

$$\tau_p = -m \cdot |g| \cdot (R - r) = -m \cdot |g| \cdot r \cdot \frac{\alpha}{3} \cdot \Delta T$$

O trabalho realizado pela força que a atmosfera exerce contra a esfera é dado por:

$$\tau_{ATM} = -p \cdot \Delta V = -p \cdot V_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T = -p \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right) \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

Sabendo que o trabalho da força resultante é igual à variação da energia cinética, e que esta é nula tanto na situação inicial quanto na situação final, o trabalho  $\tau_E$  realizado pela esfera (contra a gravidade e contra a atmosfera) em sua expansão pode ser calculado por:

$$\tau_E + \tau_p + \tau_{ATM} = \Delta E_c \Leftrightarrow$$

$$\tau_E - m \cdot |g| \cdot r \cdot \frac{\alpha}{3} \cdot \Delta T - p \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right) \cdot \alpha \cdot \Delta T = 0 - 0 \Leftrightarrow$$

$$\tau_E = \left[ m \cdot |g| \cdot r \cdot \frac{\alpha}{3} + p \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right) \cdot \alpha \right] \cdot \Delta T$$

Pela Primeira Lei da Termodinâmica, sendo  $T_F$  a temperatura final:

$$Q = \tau_E + \Delta U = \left[ m \cdot |g| \cdot r \cdot \frac{\alpha}{3} + p \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right) \cdot \alpha \right] \cdot \Delta T + m \cdot c_V \cdot \Delta T \Leftrightarrow$$

$$\Delta T = T_F - T = \frac{Q}{m \cdot |g| \cdot r \cdot \frac{\alpha}{3} + p \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right) \cdot \alpha + m \cdot c_V} \Leftrightarrow$$

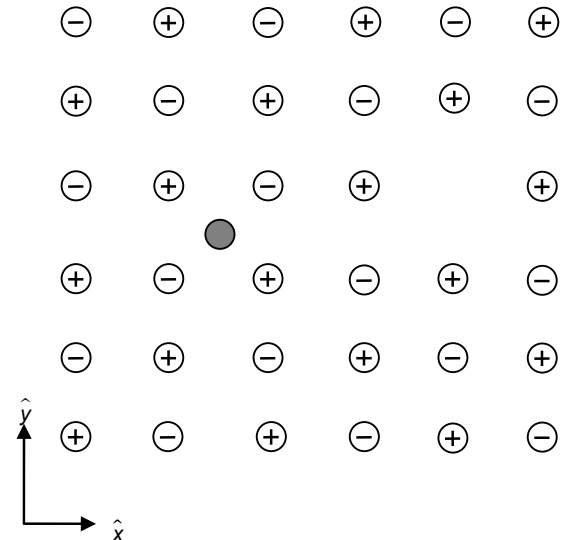
$$T_F = T + \frac{Q}{m \cdot |g| \cdot r \cdot \frac{\alpha}{3} + p \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right) \cdot \alpha + m \cdot c_V}$$

**Observação:** O calor específico dado é o calor específico do material a volume constante, grandeza que só faz sentido tratando-se de um gás ideal. Quando se trata de sólidos, materiais de baixa compressibilidade, é incomum mencionar que o calor específico é válido apenas para um dado volume. Assumimos, para este exercício, que o  $c_V$  não varia durante a dilatação da esfera.

**QUESTÃO 23**

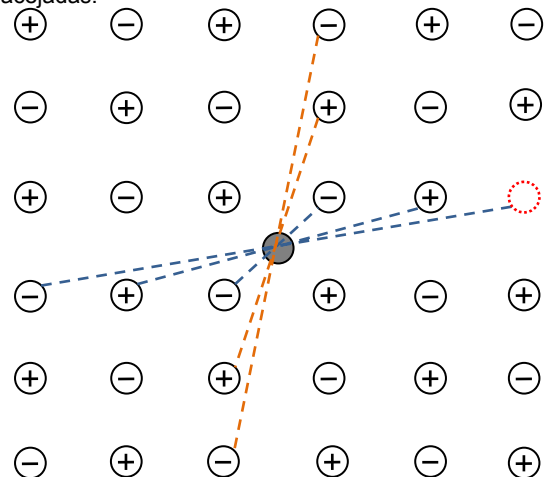
A figura mostra parte de uma camada de um cristal tridimensional infinito de sal de cozinha, em que a distância do átomo de Na ao de seu vizinho Cl é igual a  $a$ . Considere a existência dos seguintes defeitos neste cristal: ausência de um átomo de Cl e a presença de uma impureza de lítio (esfera cinza), cuja carga é igual à fundamental  $+e$ , situada no centro do quadrado formado pelos átomos de Na e Cl. Obtenha as componentes  $F_x$  e  $F_y$  da força eletrostática resultante

$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y}$  que atua no átomo de lítio. Dê sua resposta em função de  $e$ ,  $a$  e da constante de Coulomb  $K_0$ .

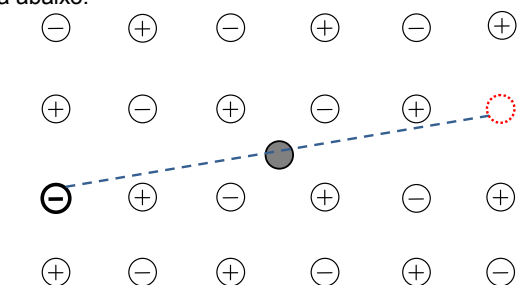


**Resolução**

Pela disposição das cargas de acordo com o enunciado, pode-se ver que para todas as cargas – com exceção de uma – há uma carga simetricamente oposta (com a mesma distância e mesma carga) de forma que, não faltasse uma carga negativa, o campo elétrico resultante sobre o átomo de Lítio seria nulo. Alguns pares de cargas simetricamente opostas estão sinalizados na figura abaixo com as linhas tracejadas:



Assim, a única carga que não tem seu campo elétrico anulado por uma carga simétrica é a carga negativa que seria pareada a uma outra carga negativa que não existe no esquema. Esta carga está destacada na figura abaixo:



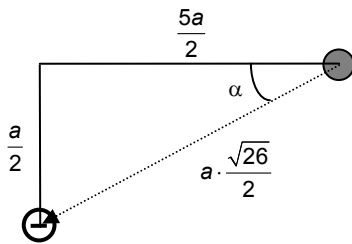
Logo, a força elétrica resultante virá apenas da carga destacada.



Levando em consideração os eixos x e y dados no enunciado, e sendo a distância entre o átomo de Lítio e a carga negativa destacada  $d = \sqrt{(2a + \frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a \cdot \sqrt{26}}{2}$ , o módulo da força resultante pode ser calculado pela Lei de Coulomb:

$$|\vec{F}| = \frac{K_0 \cdot |e \cdot (-e)|}{26 \cdot \frac{a^2}{4}} \Leftrightarrow |\vec{F}| = 2 \cdot K_0 \cdot \frac{e^2}{13 \cdot a^2}$$

Como esta força tem a direção da linha que liga o átomo de Lítio à carga negativa destacada, apontando para baixo e para esquerda, podemos decompor-lá pelas distâncias no esquema.



Logo, as componentes são:

$$F_x = -|\vec{F}| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow F_x = -\frac{5 \cdot K_0 \cdot e^2 \cdot \sqrt{26}}{169 \cdot a^2}$$

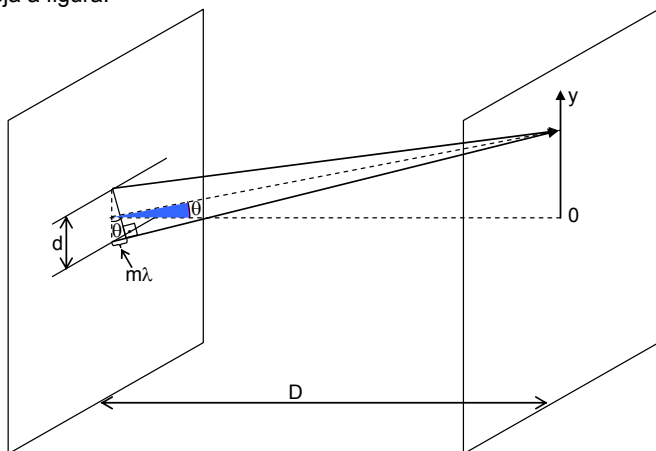
$$F_y = -|\vec{F}| \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow F_y = -\frac{K_0 \cdot e^2 \cdot \sqrt{26}}{169 \cdot a^2}$$

**QUESTÃO 24**

Em uma experiência de interferência de Young, uma luz magenta, constituída por uma mistura de luz vermelha (de comprimento de onda de 660nm) e luz azul (comprimento de onda de 440nm) de mesma intensidade da luz vermelha, incide perpendicularmente num plano onde atravessa duas fendas paralelas separadas de 22,0 μm e alcança um anteparo paralelo ao plano, a 5,00 m de distância. Neste, há um semieixo Oy perpendicular à direção das fendas, cuja origem também está a 5,00m do ponto médio entre estas. Obtenha o primeiro valor de  $y > 0$  onde há um máximo de luz magenta (intensidades máximas de vermelho e azul no mesmo local). Se necessário, utilize  $\tan \theta \cong \sin \theta$ , para  $\theta \ll 1$  rad.

**Resolução**

Para que haja um máximo de luz magenta devemos ter interferência construtiva tanto na luz azul quanto na luz vermelha no mesmo ponto. Seja a figura:



- E sejam:  
 $d = 22,0 \mu\text{m}$   
 $D = 5,00 \text{ m}$   
 $\lambda_v = 660 \text{ nm}$   
 $\lambda_a = 440 \text{ nm}$

No experimento de Young, temos as seguintes relações:

$d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda$ , com  $m \in \mathbb{Z}$  para franjas de interferência construtiva.

$$\tan \theta = \frac{y}{D}$$

Para ângulos pequenos, podemos considerar  $\tan \theta \cong \sin \theta$ , logo:

$$d \cdot \frac{y}{D} = m \cdot \lambda$$

$$y = \frac{m \cdot \lambda \cdot D}{d}$$

Nas condições do problema:

$$y_a = y_v$$

$$\frac{m_a \cdot \lambda_a \cdot D}{d} = \frac{m_v \cdot \lambda_v \cdot D}{d}$$

$$\frac{m_a}{m_v} = \frac{\lambda_v}{\lambda_a} = \frac{660}{440}$$

$$\frac{m_a}{m_v} = \frac{3}{2}$$

Os menores valores naturais de  $m_a$  e  $m_v$  que satisfazem às condições são  $m_a = 3$  e  $m_v = 2$ .

Assim,

$$y = \frac{m_a \cdot \lambda_a \cdot D}{d} = \frac{3 \cdot 440 \cdot 10^{-9} \cdot 5,00}{22,0 \cdot 10^{-6}}$$

$$y = 0,300 \text{ m}$$

**QUESTÃO 25**

Partindo do repouso, uma bolinha cai verticalmente sobre um plano inclinado de um ângulo  $\theta$  com relação à horizontal, originando seguidos choques perfeitamente elásticos. Se  $d$  é a distância inicial da bolinha ao plano, obtenha, em função de  $d$ ,  $n$  e  $\theta$ , a distância do ponto  $n$ -ésimo choque em relação ao ponto do primeiro choque.

**Resolução**

Para resolver este problema, será mais fácil se adotarmos um referencial no qual o eixo x esteja orientado na direção do plano inclinado. Observe também que foi dada a distância entre o ponto onde a esfera foi solta e o plano inclinado, e não a altura.

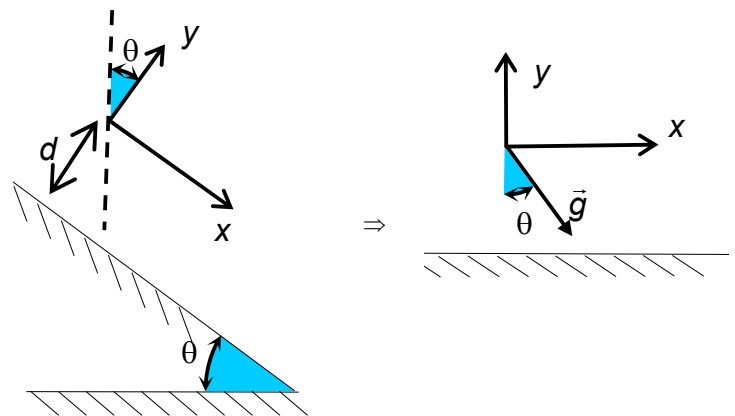


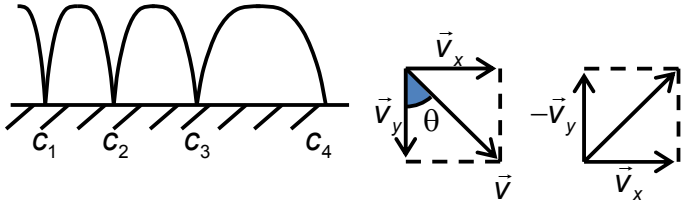
Figura 1

Figura 2

O problema agora pode ser decomposto em dois movimentos uniformemente variados: um na vertical e outro na horizontal (MUV). Considerando a figura 1: a velocidade com que a esfera atinge o plano inclinado é  $v_0 = \sqrt{2gh}$  em que  $h = d / \cos \theta$ . No momento da colisão, apenas a componente perpendicular ao plano inclinado sofrerá alteração, pois consideraremos o plano como livre de atrito (não altera a componente paralela ao plano) e a colisão é perfeitamente elástica (a componente da velocidade perpendicular ao plano inverterá seu sentido sem alterar o módulo). Considerando agora a figura 2, temos duas acelerações:

$$\begin{cases} a_x = g \sin \theta \\ a_y = -g \cos \theta \end{cases}$$

As figuras abaixo representam as respectivas distâncias entre cada ponto de colisão no plano horizontal e a componente vertical da velocidade imediatamente antes e depois de cada colisão.



Seja  $\Delta t_2$  o tempo para o corpo percorrer a distância horizontal entre o choque  $c_1$  e  $c_2$ , assim  $\Delta t_2$  pode ser determinado por:

$$\Delta y = v_{0y} \Delta t_2 + \frac{a_y \Delta t_2^2}{2}$$

para  $\Delta t_2 \neq 0$  temos:

$$0 = (v_0 \cos \theta) + \frac{(-g \cos \theta) \Delta t_2}{2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2v_0}{g}$$

Observe que o intervalo temporal entre dois choques será sempre  $\Delta t_2$ , assim vamos chamá-lo simplesmente de  $\Delta t$ .

Para a  $n$ -ésima colisão, a distância horizontal será:

$$\Delta x = v_{0x} (n-1) \Delta t + \frac{a_x [(n-1) \Delta t]^2}{2} \Rightarrow \Delta x = (v_0 \sin \theta) \Delta t + \frac{g \sin \theta [(n-1) \Delta t]^2}{2}$$

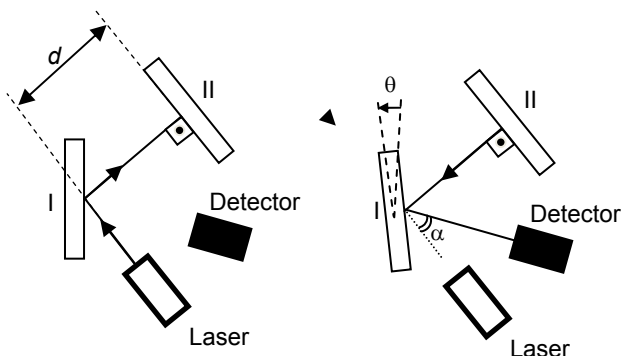
Observe que no  $n$ -ésimo choque, decorreu-se  $(n-1)$  intervalos  $\Delta t$ . Substituindo  $\Delta t$  nesta equação e considerando os dados anteriores ( $v_0 = \sqrt{2gh}$  e  $h = d / \cos \theta$ ):

$$\Delta x = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta (n-1) \Rightarrow \Delta x = \frac{4g}{g \cos \theta} d \sin \theta (n-1) \Rightarrow \Delta x = 4d \tan \theta (n-1)$$

**QUESTÃO 26**

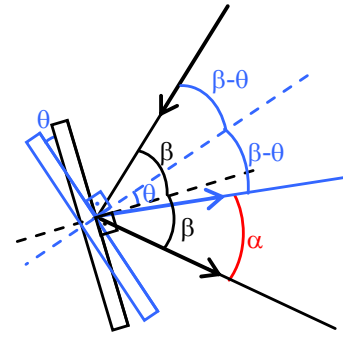
O aparato esquematizado na figura mede a velocidade da luz usando o método do espelho rotativo de Foucault, em que um feixe de laser é refletido por um espelho rotativo I que gira a velocidade angular  $\omega$  constante, sendo novamente refletido por um espelho estacionário II a uma distância  $d$ . Devido ao tempo de percurso do feixe, o espelho rotativo terá girado de um ângulo  $\theta$  quando o feixe retornar ao espelho I, que finalmente o deflete para o detector.

- Obtenha o ângulo  $\alpha$  do posicionamento do detector em função de  $\theta$ .
- Determine a velocidade da luz em função de  $d$ ,  $\omega$  e  $\theta$ .
- Explique como poderá ser levemente modificado este aparato experimental para demonstrar que a velocidade da luz na água é menor que no ar.



**Resolução**

a) A figura abaixo mostra a configuração do experimento antes e depois do giro do espelho I.



Note que  $\beta$  representa os ângulos de incidência e reflexão do raio de luz antes do giro do espelho I. Os ângulos de incidência e reflexão são iguais e são medidos com relação à normal ao espelho I.

Quando o espelho I rotaciona em  $\theta$  anti-horário, a sua acompanha o mesmo giro  $\theta$  anti-horário. Isso reduz o ângulo de incidência do raio de luz refletido no espelho II, que passa a ser  $\beta - \theta$ . O ângulo de reflexão desse raio também é  $\beta - \theta$ . Ambos são medidos pela "nova" normal ao espelho I, que foi rotacionada de  $\theta$  com relação à normal antiga.

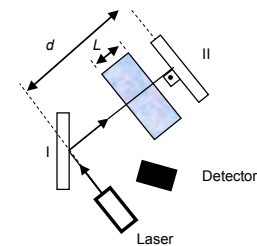
Por análise geométrica, é possível analisar que:

$$2\beta = (\beta - \theta) + (\beta - \theta) + \alpha \Rightarrow \alpha = 2\theta$$

b) Podemos relacionar as velocidades do espelho,  $\omega$ , e da luz,  $v$ , comparando os tempos de deslocamento. O tempo que o raio de luz leva para percorrer o trajeto do espelho I até o espelho II, refletir no espelho II e voltar ao espelho I deve ser o mesmo tempo que o espelho I leva para rotacionar em  $\theta$ . Assim,

$$t_{luz} = t_{espelho} \Rightarrow t_{ida} + t_{volta} = t_{espelho} \Rightarrow \frac{d}{v} + \frac{d}{v} = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow \frac{2d}{v} = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow v = \frac{2d\omega}{\theta}$$

c) Neste item, há diversas possibilidades para modificar o experimento. Numa possível solução, podemos posicionar um aquário de largura  $L$ , que tenha paredes de vidro de espessura desprezíveis com relação às dimensões principais do experimento, como mostra a figura abaixo.



Com esta configuração, o tempo total que o raio de luz levaria para percorrer o trajeto do espelho I até o espelho II, refletir no espelho II e voltar ao espelho I seria maior, já que a velocidade da luz na água é menor. Isso pode ser entendido através do índice de refração da luz

na água (relativo ao ar), que é dado por  $n = \frac{v_{ar}}{v_{água}}$ .

O tempo total é dado por:

$$t_{luz} = \frac{2(d-L)}{v_{ar}} + \frac{2L}{v_{água}} = \frac{2d}{v_{ar}} - \frac{2L}{v_{ar}} + \frac{2L}{v_{ar}/n} \Rightarrow t_{luz} = \frac{2d}{v_{ar}} + \frac{2L}{v_{ar}}(n-1)$$

Assim:

$$t_{luz} = t_{espelho} \Rightarrow \frac{2d}{v_{ar}} + \frac{2L}{v_{ar}}(n-1) = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow \theta = \frac{2d\omega}{v_{ar}} + \frac{2L\omega}{v_{ar}}(n-1)$$

Portanto, o ângulo  $\theta$  medido deverá ser maior do que o experimento original por um fator de  $\frac{2L\omega}{v_{ar}}(n-1)$ . Para isso, temos que  $n$  deverá ser maior que um e então  $v_{ar} > v_{\text{água}}$ .

**QUESTÃO 27**

Pontos quânticos são nanoestruturas que permitem a manipulação do estado quântico de um único elétron, sendo um caminho promissor para a Computação Quântica. Em primeira aproximação, um ponto quântico confina elétrons com um potencial semelhante ao de oscilador harmônico, isto é, com uma energia potencial do tipo  $V(x) = m\omega^2 x^2 / 2$ , em que  $x$  é a posição da partícula em relação ao ponto de equilíbrio,  $m$  é a massa da partícula confinada,  $\omega = \sqrt{k/m}$  e  $k$  é a “constante de mola” (embora não seja este um conceito apropriado no mundo quântico). De acordo com a Mecânica Clássica, a energia mecânica deste oscilador pode variar continuamente de zero até infinito. Por outro lado, na mecânica Quântica, a energia deste oscilador varia de forma discreta, de acordo com a expressão  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ , em que  $n$  pode assumir os valores 0, 1, 2,.... Na descrição quântica do oscilador harmônico, o menor valor possível para a energia mecânica é  $\hbar\omega/2$ , diferentemente do previsto na Mecânica Clássica. Explique por que não é possível haver energia igual a zero na descrição quântica do oscilador harmônico.

**Resolução**

Vamos supor, por hipótese, que a energia total do sistema seja zero. Podemos escrever a energia total do sistema como sendo a soma da potencial (dado que o elétron está preso pelo potencial  $V$ ) mais a cinética:

$$E_{\text{TOTAL}} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

Como ambas as energias são positivas, a única possibilidade para  $E_{\text{TOTAL}} = 0$  é  $x=0$  e  $v=0$ , uma vez que  $m \neq 0$  e  $k \neq 0$  (caso contrário a partícula estaria livre).

Com isso temos uma determinação da velocidade e do momento ( $p = mv = 0$ ). Como estes ficam exatamente determinados, as imprecisões  $\Delta x$  e  $\Delta p$  tornam-se iguais a zero, o que viola o Princípio da Incerteza de Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Sendo assim, a hipótese inicial é incorreta, ou seja, a energia deste sistema não pode ser nula.

**QUESTÃO 28**

Dois espiras verticais estacionárias com aproximadamente o mesmo diâmetro  $d$ , perpendiculares e isoladas eletricamente entre si, têm seu centro comum na origem de um sistema de coordenadas  $xyz$ , na qual também está centrado um ímã cilíndrico de comprimento  $l \ll d$  e raio  $r \ll l$ . O ímã tem seu pólo norte no semieixo  $x$  positivo e pode girar livremente em torno do eixo vertical  $z$ , sendo mantido no plano  $xy$ . Numa das espiras, situada no plano  $yz$ , circula uma corrente  $I_1 = i \cos(\omega t)$ , cujo sentido positivo é o anti-horário visto do semieixo  $x$  positivo, e na outra circula uma corrente  $I_2 = i \sin(\omega t)$ , cujo sentido positivo é o anti-horário visto do semieixo  $y$  positivo.

a) Desprezando a diferença de diâmetro entre as espiras, obtenha o campo magnético  $\vec{B}$  na origem devido às correntes  $I_1$  e  $I_2$ , na forma  $B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$ .

b) Explique, por que, partindo do repouso em  $t = 0$ , o ímã adquire um movimento de rotação em torno de  $z$ . Em que sentido (horário ou anti-horário, visto a partir do semieixo  $z$  positivo) ocorre este giro?

c) Ao se aumentar gradativamente a frequência angular  $\omega$  das correntes, nota-se que o ímã passa a girar cada vez mais rápido. Contudo, com o ímã inicialmente em repouso e se são repentinamente aplicadas correntes  $I_1$  e  $I_2$  de alta frequência angular, nota-se que o ímã praticamente não se move. Explique a(s) razão(ões).

**Resolução**

a) O campo gerado pela primeira espira é paralelo ao eixo  $x$  e de mesmo sinal que a corrente que a circula.

O campo gerado pela segunda espira é paralelo ao eixo  $y$  e de mesmo sinal que a corrente que circula.

Daí temos que

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot \cos(\omega t)}{d} \hat{x} \text{ e } B_y = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot \sin(\omega t)}{d} \hat{y}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{d} [\cos(\omega t) \hat{x} + \sin(\omega t) \hat{y}]$$

b) O módulo do campo magnético resultante é dado por:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{d}$$

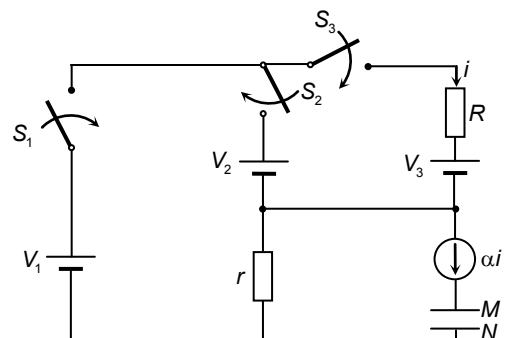
O vetor campo magnético está sempre contido no plano  $xy$  e gira em torno do eixo  $z$  com velocidade angular de módulo constante. Como o ímã tende a se alinhar com o vetor campo magnético que atua sobre ele então o ímã tende a girar no sentido anti-horário, quando visto a partir do semi-eixo  $z$  positivo.

c) O aumento gradativo da frequência angular das correntes acarreta o aumento gradativo da frequência angular do vetor campo magnético, expresso pela equação do item (a). Considerando que o ímã tende a se alinhar com o vetor campo magnético, este tenderá a girar cada vez mais rápido.

Entretanto, se são aplicadas repentinamente correntes de alta frequência, a inércia do ímã causará uma defasagem entre a posição do ímã e a direção do vetor campo magnético, de modo que, enquanto o ímã sofre um pequeno desvio angular, o vetor campo magnético terá dado quase uma volta completa, fazendo com que o ímã oscile em torno da posição inicial, com vibração de pequena amplitude.

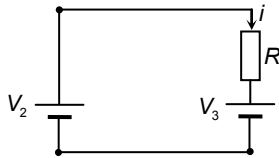
**QUESTÃO 29**

Uma fonte de corrente é um dispositivo que fornece uma corrente invariável independentemente da tensão entre seus terminais. No circuito da figura, a corrente  $\alpha i$  produzida pela fonte é proporcional à corrente  $i$  que circula no resistor  $R$ . Inicialmente descarregadas, as placas  $M$  e  $N$  são carregadas após o fechamento das chaves  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  que serão novamente abertas após um intervalo de tempo  $T$ . A placa  $M$  é então retirada do circuito e é posta em contato com um condutor  $C$  descarregado (não mostrado na figura), ao qual transfere uma fração  $f$  de sua carga. Em seguida, com esse contato desfeito, o condutor  $C$  é totalmente descarregado. Na sequência, o mesmo procedimento é aplicado à placa  $N$ , a qual transfere a  $C$  a mesma fração  $f$  de sua carga, sendo então o contato desfeito e descarregando-se novamente  $C$ . Quando  $M$  e  $N$  são reintroduzidas no circuito, com as respectivas cargas remanescentes (de mesmo módulo, mas de sinais opostos), as chaves  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  são fechadas outra vez, permanecendo assim durante o intervalo de tempo  $T$ , após o que são novamente abertas. Então, como antes, repetem-se os contatos entre cada placa e  $C$ , e este processo de carga/descarga das placas é repetido indefinidamente. Nestas condições, considerando os sucessivos processos de transferência de carga entre  $M$  e  $C$ , e  $N$  e  $C$ , determine a carga  $q$  de  $M$  após todo esse procedimento em função de  $\alpha$ ,  $f$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  e  $T$ . Considere  $V_3 < V_2 < V_1$ .



**Resolução**

Para a resolução do problema precisamos primeiro encontrar a corrente  $i$ .



Desta parte isolada do circuito ideal encontramos:

$$V_2 - V_3 = R \cdot i \Rightarrow i = \frac{V_2 - V_3}{R}$$

A corrente que penetra o capacitor é então:

$$i_{MN} = \alpha \frac{V_2 - V_3}{R}$$

E a carga nele acumulada durante o primeiro procedimento é:

$$Q_1 = i_{MN} \cdot T = \alpha \frac{V_2 - V_3}{R} \cdot T$$

Quando descarregado pelo condutor C o capacitor volta com carga residual igual a  $Q_{R1} = Q_1(1-f)$  e ganha novamente uma carga  $Q_1$  ficando com:

$$Q_2 = Q_1(1-f) + Q_1$$

Repetindo o processo de recarga e descarga, teremos agora:

$$Q_{R2} = Q_2 \cdot (1-f) \Leftrightarrow Q_{R2} = (Q_1 \cdot (1-f) + Q_1) \cdot (1-f) = (Q_1 \cdot (1-f)^2 + Q_1 \cdot (1-f))$$

$$Q_3 = Q_2(1-f) + Q_1$$

$$Q_{R3} = Q_3 \cdot (1-f) \Leftrightarrow Q_{R3} = (Q_2(1-f) + Q_1) \cdot (1-f) \Leftrightarrow$$

$$Q_{R3} = (Q_1 \cdot (1-f)^3 + Q_1 \cdot (1-f)^2 + Q_1 \cdot (1-f))$$

E sucessivamente, podemos notar que:

$$Q_{Rn} = Q_n \cdot (1-f) \Leftrightarrow$$

$$Q_{Rn} = (Q_1 \cdot (1-f)^n + Q_1 \cdot (1-f)^{n-1} + \dots + Q_1 \cdot (1-f)^2 + Q_1 \cdot (1-f))$$

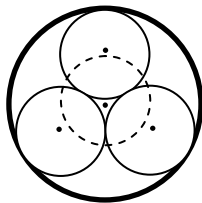
Podemos ver que o n-ésimo termo,  $Q_{Rn}$ , é o limite da soma de uma progressão geométrica infinita cujo primeiro termo é  $Q_1 \cdot (1-f)$  e a razão é  $(1-f)$ . Sendo assim,

$$Q_{Rn} = \left( \frac{a_1}{1-q} \right) \Leftrightarrow Q_{Rn} = \left( \frac{Q_1 \cdot (1-f)}{1-(1-f)} \right) \Leftrightarrow Q_{Rn} = \frac{Q_1 \cdot (1-f)}{f} \Leftrightarrow$$

$$Q_{Rn} = \alpha \frac{V_2 - V_3}{R} \cdot T \cdot \frac{(1-f)}{f}$$

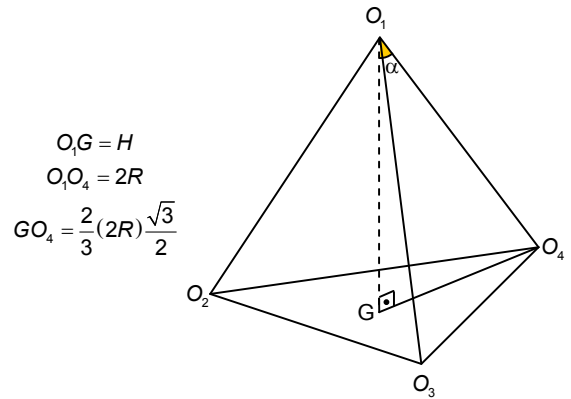
### QUESTÃO 30

Um recipiente cilíndrico vertical contém em seu interior três esferas idênticas de mesmo peso P que são tangentes entre si e também à parede interna do recipiente. Uma quarta esfera, idêntica às anteriores, é então sobreposta às três esferas como ilustrado em pontilhado. Determine as respectivas intensidades das forças normais em função de P que a parede do recipiente exerce nas três esferas.



### Resolução

Sendo  $O_1, O_2, O_3$  e  $O_4$  os centros das esferas, podemos notar que ao ligarmos esses centros, formamos um tetraedro regular cuja aresta mede  $2R$ , conforme ilustra a figura:



$$O_1G = H$$

$$O_1O_4 = 2R$$

$$GO_4 = \frac{2}{3}(2R) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Segue, pelo teorema de Pitágoras:

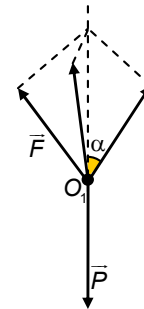
$$H^2 = (2R)^2 - \left( \frac{2}{3}(2R) \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \Rightarrow H = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

E, por consequência,

$$\cos(\alpha) = \frac{H}{2R} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{2R\sqrt{3}}{3 \cdot 2R} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

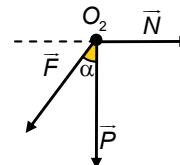
Sendo  $\vec{F}$  a força que cada uma das três esferas da base exerce sobre a esfera sobreposta, temos o seguinte sistema de forças.



Como temos um equilíbrio estático, podemos notar que a decomposição das forças  $\vec{F}$  sobre o plano que contém  $O_1$  e é paralelo à base do tetraedro se anulam e a decomposição das forças  $\vec{F}$  na direção de  $\vec{O_1G}$  devem se anular com a força peso  $\vec{P}$ . Deste modo,

$$3 \cdot |\vec{F}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{P}| \Leftrightarrow F = \frac{P}{3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}} \Leftrightarrow F = \frac{P\sqrt{6}}{6}$$

Analisando o problema, podemos dizer que as esferas da base não exercem forças umas nas outras, deste modo, o sistema em equilíbrio pode ser representado pelo diagrama abaixo.



Sendo  $\vec{N}$  a força normal que a parede lateral exerce na esfera. Deste modo, decompondo  $\vec{F}$ , segue que:

$$|\vec{N}| = |\vec{F}| \cdot \sin(\alpha) \Leftrightarrow N = F \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow N = \frac{P\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow N = \frac{P\sqrt{2}}{6}$$

**Obs:** Se considerarmos que a base do cilindro é uma parede, devemos calcular a força normal exercida por esta parede nas esferas da base. Deste modo, considerando o sistema formado pelas quatro esferas um como um único corpo segue que:

$$3 \cdot |\vec{N}_y| = 4 \cdot |\vec{P}| \Leftrightarrow N_y = \frac{4}{3}P$$

## **Equipe desta resolução**

### **Física**

Danilo José de Lima  
Luiz Salles de Carvalho  
Michel Benite Rossi  
Rubens Gonçalves Salsa Jr.  
Vinício Merçon Poltronieri

### **Revisão**

Edson Vilela Gadbem  
Eliel Barbosa da Silva  
Fabiano Gonçalves Lopes  
Felipe Eboli Sotorilli  
Marcelo Duarte Rodrigues Cecchino Zabani

## **Digitação, Diagramação e Publicação**

Allan Cavalcanti de Moura  
Patrícia Beijinho Teixeira  
Daniela Patrícia de Araujo